
面内曲げモーメントを受ける正方形板の後座屈挙動

Post Buckling Behavior of a Square Plate Subjected to Bending Stresses Applied in the Plane of Plate

浜田 敬之介(Keinosuke Hamada)

要旨：

高張力鋼の進歩によって鋼構造は経済的に設計されることが可能になり、これは軽量化、薄肉化につながるようになった。しかし、プレートガーダーの腹板の設計基準は線型理論による座屈荷重によっている。設計基準が座屈荷重によるかぎり高張力鋼を使用することが普通鋼に比べて有利であるとはいえない。しかし、大変形理論によって後座屈域における耐荷力を考慮することによって高張力鋼の有利性が可能になる。ここでは面内曲げモーメントを受ける正方形板の後座屈域における挙動をカルマンの方程式を解いて解析し、実験値と比較した。この結果、高張力鋼を腹板として使用する有利性があきらかになった。

Synopsis：

Owing to improvement of hightension steel, it has become possible to economically design steel structure, that is, to make it thinner and lighter. In spite of this, in the design of webplates of plate girders, buckling load derived from the linear theory is used as criterion. As long as the criterion is based on buckling load, hightension steel is not always more advantageous than carbon steel in the design for the webplates. However, by considering strength of steel in post-buckled range with the aid of large deflection theory, it is possible to make a good use of properties of high tension steel. In this paper, post buckling behavior of a square plate subjected to bending stress is analyzed by solving von Karman's large deflection equation and these results are compared with experimental results. In conclusion, it has become apparent that the use of hightension steel for webplates is more advantageous than carbon steel.

(c)JFE Steel Corporation, 2003

本文は次のページから閲覧できます。

面内曲げモーメントを受ける正方形板の後座屈挙動

Post Buckling Behavior of a Square Plate Subjected to Bending Stresses Applied in the Plane of Plate

浜田 敬之介*

Keinosuke Hamada

Synopsis:

Owing to improvement of high tension steel, it has become possible to economically design steel structure, that is, to make it thinner and lighter.

In spite of this, in the design of webplates of plate girders, buckling load derived from the linear theory is used as criterion.

As long as the criterion is based on buckling load, high tension steel is not always more advantageous than carbon steel in the design for the webplates.

However, by considering strength of steel in post buckled range with the aid of large deflection theory, it is possible to make a good use of properties of high tension steel.

In this paper, post buckling behavior of a square plate subjected to bending stress is analyzed by solving von Kármán's large deflection equation and these results are compared with experimental results.

In conclusion, it has become apparent that the use of high tension steel for webplates is more advantageous than carbon steel.

1. まえがき

多くのすぐれた高張力材の出現によって鋼構造物は、軽量化、薄肉化され死荷重の軽減によって経済的な設計が可能になってきている。このような中であって面内力を受ける板構造の設計方法に目を転じてみると、その許容応力は座屈荷重によって決定されているようである。座屈値を決定するファクターは、周辺の支持条件、ヤング率、板の細長比である。これらは一般に降伏点に関係しないため、このような板構造物に降伏点の高い材料を使用しても余りメリットのないことは広く指摘されていることである。

一方、板構造物における座屈荷重について考えてみるとこれは面外への変位を無視した線型の理論によってえられたものである。これには次のような不合理な点が含まれている。一般に溶接などによって製作された板構造においては、初期たわみをもっているため面内力の作用を受けると同時に面外へ変形を始めるものであるから、面外への変形を結果的には認めていることになる。また面外からの力に対しては面外へのたわみを許容しているのに面内力による面外への変形を認めないのは座屈という不安定現象をとまなっているからである。しかし不安定域といっても、これは線型の理論に基づいた領域である。大変形理論によってこのような領域の後座屈挙動を解析し、線型の理

* 本社建材開発部土木開発室

論による安定域を拡大してこのような領域において高張力材を使用してこそ降伏点が高いという材料特性がいかせることになる。

後座屈域における挙動を解析しその極限耐荷力を求めようとする研究は、航空機構造の分野においてすでに1930年代よりなされている。^{1)~3)} 一方土木構造物の分野においても、近年になってプレートガーダーの腹板の耐荷力の研究が多くなされている。^{4)~9)} たとえば、Baslerによる航空工学で発達したWagnerの張力場の理論をとり入れた理論的ならびに実験的な研究は、プレートガーダーの耐荷力について従来の考え方を大きくかえつつあるといえよう。

ここではBaslerのような方法によらず、古くから板の解析に用いられている方法によって面内曲げモーメントを受ける正方形板の後座屈域における挙動を、Kármánの方程式を近似的に解くことによって解析した。この結果、後座屈域における耐荷力はかなり期待できることがわかり、後座屈域における極限耐荷力を基準にして設計するようにすれば、高張力材の使用が有利であることもあきらかになった。さらに少数の実験例と計算値の比較をおこなったところかなりよい結果がえられた。

2. Kármánの方程式による板の解析

(面内曲げモーメントを受ける正方形板について)

図1のごとく一辺の長さ b (板厚 h)の正方形板があり、周辺単純支持の条件のもとに外力とし

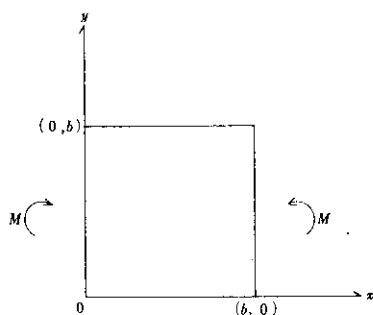


図1 正方形板に M が作用した状態図

て曲げモーメント M が作用した場合の後座屈域における諸応力の挙動をKármánの方程式によって解析する。

2.1 基本方程式の誘導³⁾

Kármánによれば薄い板の大変形の方程式は次のようにしてえられる。いま板の中央面に x, y 軸、これに垂直に z 軸をとり x, y, z 方向変位を u, v, w とすると、 x, y 方向のひずみ、 $x-y$ 平面のせん断ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ は2次の項まで考慮すれば、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

さらに膜応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ の間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu\sigma_y \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \nu\sigma_x \\ E\gamma_{xy} &= 2(1+\nu)\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

E : ヤング率

ν : ポアッソン比

Airyの応力関数 F を導入すると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

(1), (2), (3)式より u, v を消去すると次の適合条件式がえられる。

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ただし

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

次に面に垂直方向の釣合を考えて次式がえられる。

$$\nabla^4 w = \left(-\frac{h}{D} \right) \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

なお D は板の曲げ剛性で

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

(4), (5) 式が周知の Kármán の方程式である。

ここで考察する正方形板は、周辺単純支持で面内曲げモーメントを受けると仮定するので境界条件は次のようになる。

周辺における境界条件として

$$w = 0 \quad (\text{全周辺において})$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (x=0, x=b \text{ にそつて})$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (y=0, y=b \text{ にそつて}) \dots \dots (6)$$

周辺における外力の条件として

$$\left. \begin{aligned} M &= -h \int_0^b \sigma_{xy} dy \quad (x=0, x=b \text{ にそつて}) \\ \int_0^b \sigma_y dx &= 0 \quad (y=0, y=b \text{ にそつて}) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{全周辺で}) \end{aligned} \right\} (7)$$

(6), (7) 式の条件のもとで (4), (5) 式を解いて w , F を直接に求めることは困難であるので、近似的に解く方法として、まず (6) 式の境界条件を満足する 2 重フーリエ級数を次のように仮定する。

$$w = h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \dots \dots (8)$$

(8) 式を (4) 式に代入すると次式のごとく線型の方程式になる。

$$\nabla^4 F = (Eh^2\pi^4/b^4) \sum_{p=0,1}^{\infty} \sum_{q=0,1}^{\infty} c_{pq} \cos \frac{p\pi x}{b} \cos \frac{q\pi y}{b} \dots \dots \dots (9)$$

c_{pq} : a_{mn} の 2 次式

周辺において F が (7) 式を満足するように決める。(9) 式が線型の方程式だから重ね合せが可能になって容易に次式が求められる。

$$F = -\frac{2M}{b^3 h} \left(y - \frac{b}{2} \right)^3 + Eh^2 \sum_{p=0,1}^{\infty} \sum_{q=0,1}^{\infty} \Phi_{pq} \cos \frac{p\pi x}{b} \cos \frac{q\pi y}{b} \dots (10)$$

Φ_{pq} : a_{mn} の 2 次式

さて (10) 式を (5) 式に代入して Galerkin の方法によって係数 a_{mn} を次式によって決定できる。

$$\int_0^b \int_0^b \left\{ \nabla^4 w - \frac{h}{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \right\} \sin \frac{r\pi x}{b} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (r=1, 2, \dots \quad s=1, 2, \dots) \dots \dots (11)$$

(11) 式を r, s の与えられた値に対して計算すると係数 a_{mn} に関する 1 次と 3 次の項のみよりなる連立代数方程式になる。

$$\begin{aligned} & \frac{(r^2+s^2)^2}{4} \pi^4 a_{rs} - \frac{M}{D} r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12ns}{(n^2-s^2)^2} \{ (-1)^{n-s} - 1 \} \\ & \cdot a_{rn} - \frac{3\pi^4}{4(1-\nu^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [-(nr+ms)^2 \times \{ \Phi_{m+r, n-s} \\ & + \Phi_{m-r, n+s} + \Phi_{m+r, s-n} + \Phi_{r-m, s+n} \} + (nr-ms)^2 \\ & \cdot \{ \Phi_{r+m, n+s} + \Phi_{m-r, s-n} + \Phi_{m-r, n-s} + \Phi_{r-m, s-n} \\ & + \Phi_{r-m, n-s} \}] a_{mn} = 0 \dots \dots \dots (11') \end{aligned}$$

ここで

$$\Phi_{pq} = 0 \quad (q < 0 \text{ または } p < 0)$$

実際の計算上項数を有限個として計算することになるが、ここでは項数のとり方については次のように考えて 3 項えらんだ。面外への変形は線型の理論によりえられる座屈値をへて変形するものであり、その座屈値は $\sigma_{cr} = 25.6\pi^2 D / b^2 h^{10)}$ である。一方座屈モードは図 2¹⁰⁾ より $m=2$ の場合であり、3 項までとると次のようになる。

$$w = h \sin \frac{2\pi x}{b} \left(a_{21} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{22} \sin \frac{2\pi y}{b} + a_{23} \sin \frac{3\pi y}{b} \right)$$

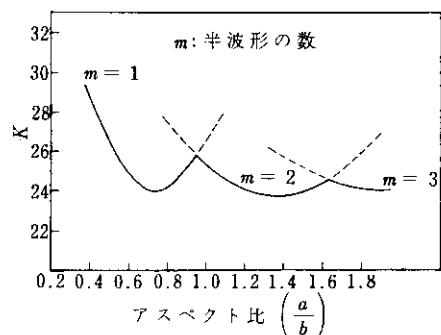


図 2 K とアスペクト比の関係

表1 ϕ_{pq} の値

ϕ_{01}	$-\frac{1}{4}(A_1A_2+A_2A_3)$	ϕ_{40}	$\frac{1}{512}(A_1^2+4A_2^2+9A_3^2)$
ϕ_{02}	$\frac{1}{32}(A_1^2-2A_1A_3)$	ϕ_{41}	$\frac{1}{1156}(9A_1A_2+25A_2A_3)$
ϕ_{03}	$\frac{1}{4}A_1A_2$	ϕ_{42}	$\frac{1}{100}A_1A_3$
ϕ_{04}	$\frac{1}{128}(A_2^2+2A_1A_3)$	ϕ_{43}	$-\frac{1}{2500}A_1A_2$
ϕ_{05}	$\frac{1}{100}A_2A_3$	ϕ_{44}	$-\frac{1}{1024}A_1A_3$
ϕ_{06}	$\frac{1}{288}A_3^2$	ϕ_{45}	$-\frac{1}{6724}A_2A_3$

この式を(11')式に代入して $(r, s)=(2, 1)$, $(r, s)=(2, 2)$, $(r, s)=(2, 3)$ の場合を計算すると次の3元3次の連立方程式がえられる。この計算にあたってモーメント M は無次元化して $\lambda=M/D$ とおき、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。また3項近似したときの ϕ_{pq} の値は表1に示すようになった。

$$\left. \begin{aligned} &2.2893A_1+0.0802\lambda A_2+3.7785A_2^2A_3 \\ &+5.218A_1A_3^2+4.531A_2^2A_1 \\ &+1.0625A_1^3-3A_1^2A_3=0 \\ &5.8608A_2+0.0802A_1\lambda+0.0866\lambda A_3 \\ &+8.4132A_2A_3^2+7.5570A_1A_2A_3 \\ &+4.5319A_1^2A_2+2A_2^3=0 \\ &15.4762A_3+0.0866\lambda A_2+8.4132A_2^2A_3 \\ &+3.7785A_1A_2^2+5.2181A_1^2A_3 \\ &+6.053A_3^3-A_1^3=0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、 $a_{21}=A_1$, $a_{22}=A_2$, $a_{23}=A_3$ とおいた。

(12)式は項数を3項とったものであるが、この式が表わす線型の座屈値と正確な値 $\sigma_{cr}=25.6\pi^2D/b^2h$ とを比較してみる。 σ_{cr} を座屈モーメントの無次元化した値で表わすと $\lambda_{cr}=42.1098$ となる。一方(12)式よりえられる座屈モーメント λ'_{cr} は、(12)式の3次の項を座屈値の近傍では微少であるとして無視した固有値の問題として決まる。このようにして求められた座屈モーメントは $\lambda'_{cr}=42.168$ となる。この値は λ_{cr} の極めてよい近似である。したがって(12)式は少なくとも座屈点の近傍ではかなり正確なたわみ型を表わしていると考えられる。

2.2 諸応力および相対変位の算出

膜応力は(3)式によって次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{12M}{b^3h} \left(y - \frac{b}{2} \right) + Eh^2 \left(-\frac{\pi}{b} \right)^2 \\ &\quad \cdot \sum_{p=0,4}^6 \sum_{q=1}^5 q^2 \phi_{pq} \cos \frac{p\pi x}{b} \cos \frac{q\pi y}{b} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = Eh^2 \left(-\frac{\pi}{b} \right)^2 \sum_{p=4}^4 \sum_{q=0}^5 p^2 \phi_{pq} \\ &\quad \cdot \cos \frac{p\pi x}{b} \cos \frac{q\pi y}{b} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -Eh^2 \left(-\frac{\pi}{b} \right)^2 \sum_{p=4}^4 \sum_{q=1}^5 pq \phi_{pq} \\ &\quad \cdot \sin \frac{p\pi x}{b} \sin \frac{q\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

降伏応力条件としては Huber von Mises-Hencky の比較応力度 σ_M で示せば次式のようになる。

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (14)$$

周辺における相対変位は

$$[u]_{x=0}^{x=b} = \int_0^b \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

この相対変位については $y=0$, $y=b$ で異なっていて次式のようになる。

$y=0$ にそって

$$[u]_{x=0}^{x=b} = \frac{\lambda h^2}{2b(1-\nu^2)} - \frac{\pi^2 h^2}{8b} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

$y=b$ にそって

$$[u]_{x=0}^{x=b} = -\frac{\lambda h^2}{2b(1-\nu^2)} - \frac{\pi^2 h^2}{8b} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \quad (15-a)$$

次に v については

$$[v]_{y=0}^{y=b} = \int_0^b \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

$x=0$ および $x=b$ にそって一定で

$$[v]_{y=0}^{y=b} = -\frac{\pi^2 h^2}{8b} (A_1^2 + 4A_2^2 + 9A_3^2) \quad (15-b)$$

以上えた諸式によって諸応力および相対変位を算出する。

3. 電子計算機による数値解析

3.1 基本方程式の解

2.1 でえられた3元3次連立方程式(12)式につい

て λ を λ_{cr} より大きい値として $\lambda=430$ まで適当に変化させてその解を求めた。この解は京都大学電子計算機KDC-IIによって、次に概略を示すような方法⁽¹⁾で求めた。(12)式は3次と1次の項よりなる特殊な型の3元3次の連立方程式である。この方程式の解き方として他にも方法があると思われるが、ここでは次のように考えて求めた。いま $A_2/A_1=\alpha$, $A_3/A_1=\beta$ がわかっていたとすれば(12)式の3つの式にそれぞれ代入すれば、次のような A_1 に関する3次方程式が3個えられる。

$$U_l A_1^3 + T_l A_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで $l=1, 2, 3$, $U_l = U_l(\alpha, \beta)$, $T_l = T_l(\lambda, \alpha, \beta)$ である。

(16)式は容易に解けて

$$A_1 = \pm \sqrt{-T_l/U_l} \quad A_1 = 0$$

したがって $A_1 = \sqrt{-T_l/U_l}$ とすれば他の根は $A_2 = \alpha \sqrt{-T_l/U_l}$, $A_3 = \beta \sqrt{-T_l/U_l}$ として決まる。

次に α, β の決定であるが、これは(12)式において座屈荷重の近傍では、 A_1, A_2, A_3 とも微少な値と考えられるから、3次の項を無視すれば一次の項よりなる斉次の方程式がえられ、この次点における根の比 α_{cr}, β_{cr} が決まる。ここを出発点として荷重項(λ)を少し増加させる。この荷重を少し増加させた段階では α, β の値は α_{cr}, β_{cr} に近い値であろうと予想されるので α_{cr}, β_{cr} の値を適当に増減させることによって根として最適な値を求めた。このような操作を順次繰り返すことによって各荷重レベルでの根の比を求めて他の根を決定した。ここで最適な基準となる根は次のようにして決めた。

(16)式によれば α, β が決まれば3個の方程式がえられる。本来これらの値は同一の値でなければならないが、 α, β は近似的な値であるから3個の方程式よりえられる値はそれぞれ異なった値である。いまこの値をそれぞれ $RT(1), RT(2), RT(3)$ としてこれらの根の相対誤差SSを次式によって求める。

$$SS = \sqrt{\{(RT(2)/RT(1)-1)^2 + (RT(3)/RT(1)-1)^2\}/2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

SSは根の精度を表わしていると考えられるので $SS < 0.05$ を設定して、この範囲にはいる根の中で最小なものを根として最適なものと考えた。

このようにして $RT(1), RT(2), RT(3)$ を決めて A_1 の値としてはこれらの平均値として求めた。すなわち、

$$A_1 = \{RT(1) + RT(2) + RT(3)\}/3$$

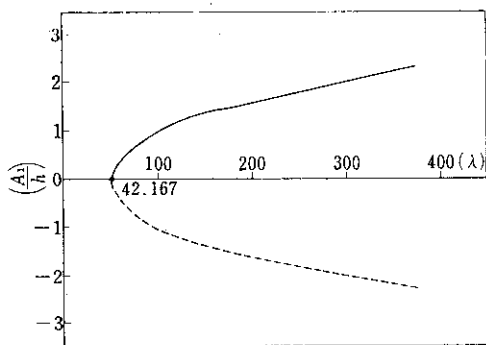
と決定できる。このようにして、荷重項を50から430まで適当に変化させ各荷重レベルにおける A_1, A_2, A_3, SS の値を求めて表2に示した。

表2 3元3次連立方程式の解 ($\lambda_{cr}=42.17$)

λ	A_1	$-A_2$	A_3	SS
50	0.3833	0.2335	0.0653	0.039
60	0.5755	0.3934	0.1035	0.017
70	0.7164	0.5014	0.1340	0.014
80	0.8287	0.5865	0.1611	0.009
90	0.9239	0.6595	0.1867	0.007
100	1.0140	0.7335	0.2070	0.006
110	1.0860	0.7943	0.2307	0.004
150	1.3540	1.0060	0.3048	0.001
190	1.5740	1.1730	0.3717	0.005
250	1.8380	1.4160	0.4466	0.004
290	2.0090	1.5370	0.4975	0.005
330	2.1750	1.6510	0.5384	0.005
370	2.2380	1.7760	0.5834	0.002
410	2.4290	1.8720	0.6252	0.001
430	2.4840	1.9350	0.6390	0.001

ここで(16)式によって A_1 の根として3根がえられるが、その物理的な意味について考えてみる。3根は絶対値の等しい2根と零とよりなっている。これらは面外への変形は全くしない場合(すなわち $A_1=0$)と、その他の2根は全く同等の可能性で面外への変形が2種あることを示している。

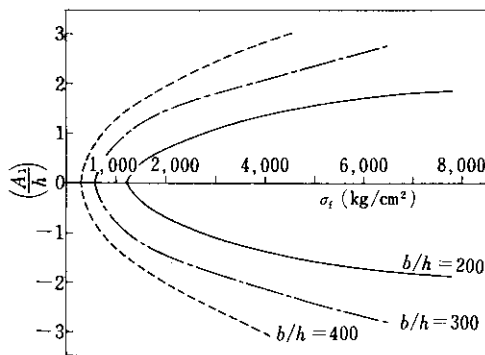
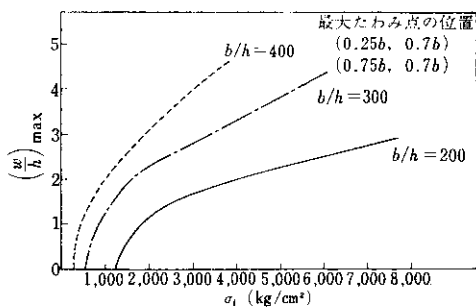
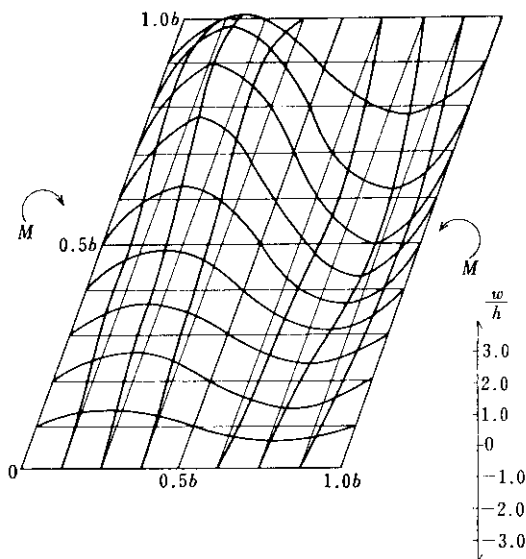
これらは不安定現象と呼ばれている領域であり、線型の理論よりえられる座屈値がこれらの分岐点になっていることはあきらかである。荷重 λ と根 A_1 の関係は図3に示すようになる。 λ が大きくなるに従い3根の間の開きは大きくなる。これは荷重と変形の関係が放物線によって変化しており、荷重とたわみの間に線型の関係はたまたたいていない。このように座屈荷重点をさかいとして不安定の領域にはいることはあきらかであるが、 λ の比較的小さい間は3根の間には余り大きな差もなく弾性域であるから荷重を座屈荷重以下にすれば、曲げや引張りを受ける部材と同じく復元すると考えられる。したがってこのような領域がは

図3 (A_1/h) と (λ) の関係

っきりすれば、設計の基準として座屈値をはなれたさらに大きな耐荷力が期待されることはあきらかである。このような可能性を以下でさぐってみる。

3.2 板の面外たわみ

図3において示した関係は荷重(λ)と根 A_1 の関係であったが、 λ はモーメント M をかけた場合の縁応力 σ_f と板の細長比 b/h によって決まるものである。すなわち、 $\lambda = \frac{\sigma_f E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{b}{h}\right)^2$ の関係があるので b/h を決めて σ_f と A_1 の関係を図4に示した。当然予想されることであるが b/h が大きくなると小さい応力に対しても不安定の度合は大きくなっている。図5には最大たわみ $(w/h)_{max}$ と σ_f の関係を示した。板厚の3倍程度までの変形を許容すれば $b/h=300$ でもかなり大きな応力まで使用できることがわかる。ここで解析したのは周辺単純支持の条件のもとであったが、実際の板構造では周辺における支持条件がきついため、たわみの量はずっと少なくなることが予想されるの

図4 荷重(σ_f)と (A_1/h) の関係図5 荷重(σ_f)と最大たわみ $(w/h)_{max}$ の関係図6 $\lambda/\lambda_{cr}=5.30$ におけるたわみ型

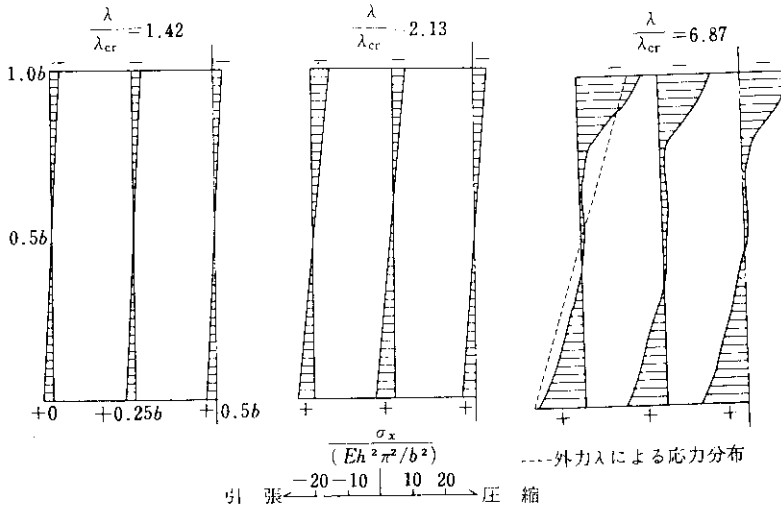
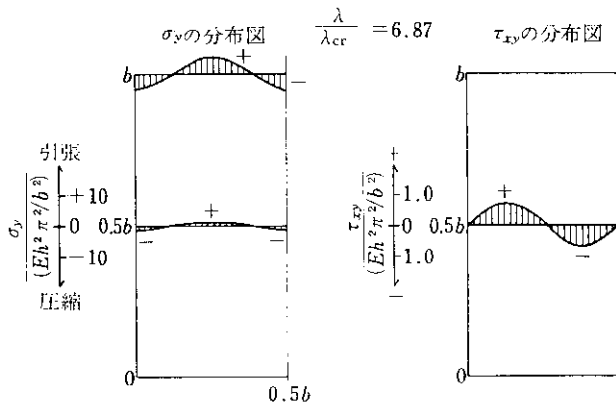
で、単純支持の場合よりさらに許容応力を大きくとることが可能であろう。

図6には $\lambda/\lambda_{cr}=5.30$ における変形状態を示した。

3.3 諸応力および相対変位について

3.3.1 膜応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ と荷重 λ の関係

図7に板の中央面における σ_x の分布状態を示した。 λ が $2\lambda_{cr}$ 程度までは σ_x の分布は一樣であるが $7\lambda_{cr}$ 程度になると $\sigma_x = \partial^2 F / \partial y^2$ の係数 a_{mn} の2次の項の影響によって σ_x の分布が乱されられる。一方 σ_y, τ_{xy} については図8に示した。 σ_y は λ が小さい間は余り影響がないが、 $7\lambda_{cr}$ 程度になると $y=b$ にそって力が生じている。(7)式の

図7 板の中央面における σ_x の分布状態図8 板の中央面における σ_y, τ_{xy} の分布状態

第2番目の式

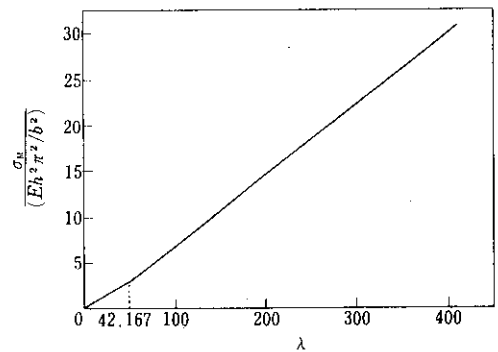
$$\int_0^b \sigma_y dx = 0$$

($y=0, y=b$ にそって)の仮定は λ が λ_{cr} の数倍までは $\sigma_y=0$ と考えてよいが、 $7\lambda_{cr}$ 程度になると $y=b$ における σ_y の分布は σ_x と比べて無視できないような値になっていることがわかる。また τ_{xy} については、ほとんど無視してもよいことがわかる。

3.3.2 比較応力度 σ_M と荷重 λ の関係

耐荷力を考えるためにHuber von Mises-Henckyの比較応力度 σ_M を用い、 σ_M の最大値 σ_{Mmax}

と λ の関係を図9に示した。 σ_{Mmax} の生じる点は点 $(0.25b, 1.0b)$ であり図9から明らかなように σ_{Mmax} と λ の関係は2直線よりなっている。始めの直線は座屈荷重に達するまでであり $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ であるから当然であるが後座屈域における直線は次のように考えられる。 σ_{Mmax} の点 $(0.25b, 1.0b)$ では、 $\sigma_x \gg \sigma_y, \tau_{xy} \approx 0$ であることは3.3.1で判明したことである。

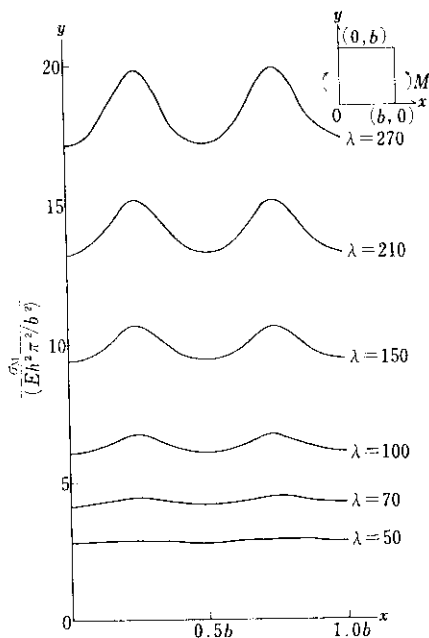
図9 σ_{Mmax} と λ の関係

この関係を使って σ_M の式を変形すると次のようになる。

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \div \left| \sigma_x \left(1 - \frac{\sigma_y}{2\sigma_x} \right) \right|$$

この式より σ_{Mmax} と λ の間には後座屈域においても直線関係がほぼたもたれていることがわかる。一般の板構造物では膜応力は(7)式の2番目のような周辺における応力条件ではないから σ_M はこのように単純にはならないだろう。

図10は周辺 $y=b$ における σ_M の分布状態を示した。 λ が大きくなるにしたがって σ_M の分布状態にかなり大きな変化が生じている。直線 $x=0.25b$ および $x=0.75b$ にそっては、たわみが大きくこのため膜応力 σ_y が発生して、 σ_M の値を大きくしていると考えられる。

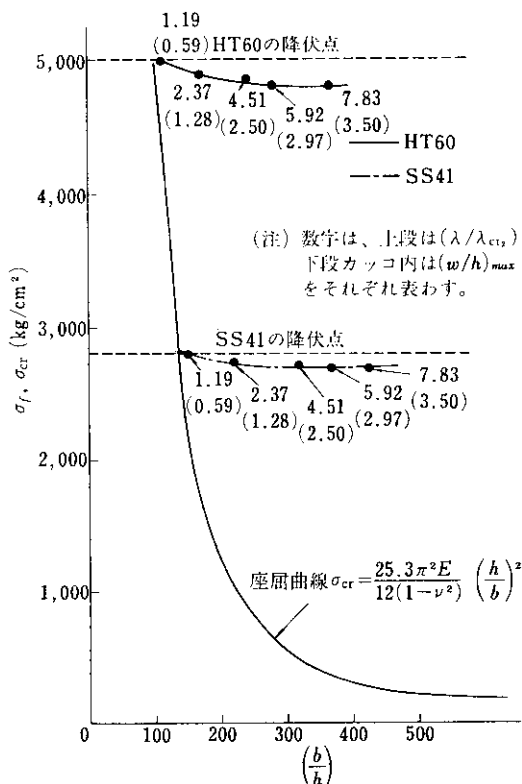
図10 $y=b$ にそつ σ_M の分布

3.3.3 膜板の細長比 (b/h) と極限耐荷力

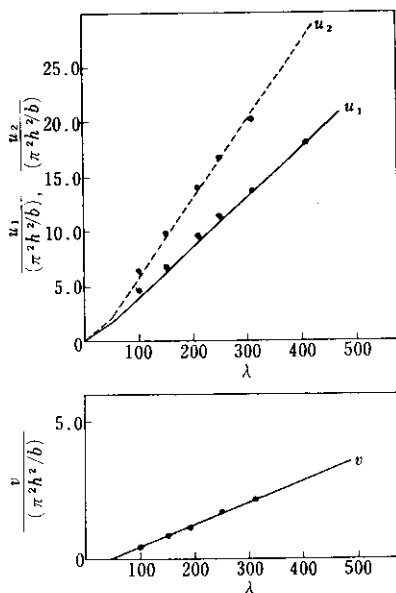
ここで極限耐荷力としては板の中央面における膜応力によって σ_{Mmax} が材料の降伏点に達するときの外力 λ による圧縮側の縁応力 σ_f を考えた。普通鋼と高張力鋼との極限耐荷力を比較するためにここでは降伏点それぞれ異なる SS41 ($\sigma_f = 2800 \text{ kg/cm}^2$), HT60 ($\sigma_f = 5000 \text{ kg/cm}^2$) をえらんでこの2者の間の関係を図11に示した。耐荷力はSS41の方がHT60より降伏点に近い。このことは同じ細長比に対してHT60の方が大きな荷重に耐えるためその時点でのたわみも大きくなり、これが膜応力の発生をうながし、 σ_M を大きくして耐荷力を降伏点より低くしていると考えられる。図11より明らかになることは、両材を極限耐荷力によって設計すれば、引張材として使用する場合とはほとんど同じように設計することが可能であろう。

3.3.4 相対変位と荷重 λ の関係

相対変位は面内曲げモーメントを受ける場合、圧縮を受ける側と引張りをを受ける側では異なるので、引張を受ける側を u_1 ($y=0$ にそつて)、圧縮を受ける側を u_2 ($y=b$ にそつて)、 $x=0$ および $x=b$ にそつては一定であるので v とした。図12にこれ

図11 極限耐荷力と細長比 (b/h) の関係

らの関係を示した。 u_1, u_2, v ともそれぞれほぼ直線を保っており、特に興味深く思えるのは圧縮を

図12 相対変位 u_1, u_2, v

受ける側においても直線になっていることである。

3.3.5 理論値と実験値¹²⁾の比較

いままでにえられた結果と関西橋梁鉄骨溶接研究会が昭和39年度溶接プレートガーダーの耐荷力についておこなった実験値を比較したのが表3である。この実験は3本の溶接I桁(SS41 $\sigma_Y=2800$ kg/cm²: A桁, HT60 $\sigma_Y=5000$ kg/cm²: B, C桁)についておこなったものであり、実験桁の寸法はスパン10m, 腹板高さ1.2mで耐荷力について測定されたのは、アスペクト比=1の垂直スチフナーと上, 下フランジに囲まれた正方形板の部分についてであった。これら3本の実験桁の2点に載荷して、中央における曲げモーメントが一定な曲げパネルと支点附近におけるせん断力が卓越しているせん断パネルについて面外へのたわみ載荷方向へのたわみ, ひずみなどを測定してえられた結果である。

表3における計算値は図11によってえられた σ_f である。実験値は、A, C桁では曲げパネル、B桁ではせん断パネルがそれぞれ破壊した時点での値である。耐荷力についてはA桁、C桁において実験値、Baslerの理論値、計算値ともかなりいい一致を示している。次に破壊によって生じたたわみについては実験値の方がいく分大きくでている。実験桁では初期たわみをA, B, C桁ともそれぞれ3mm程度もっているが、この影響よりむし

ろ破壊時点でのたわみは塑性変形を受けて大きくなったと考えられる。なお弾性域ではずっと小さい値であろう。面外たわみの実験値と計算値の比較は時間の制約やはっきりした実験データもなく今回はおこなうことができなかった。

4. むすび

以上面内曲げモーメントを受ける正方形板の周辺に単純な境界条件をあたえることによって、後座屈域における挙動を解析した結果、次のことがあきらかになった。

(1) 面内力を受ける板の面外への変形は座屈値を分岐点として3つの変形が可能であるが実際の板では外力の作用状態や材料寸法の違いなどのため荷重と変位の関係は一意的なものとなろう。したがって後座屈域における極限耐荷力を基準にして設計するようにすれば、曲げや引張りを受ける材料と同様な取扱いが可能であろう。このように不安定域を設計にとりいれることによって高張力鋼など降伏点の高い材料の特性も大いに生かせるようになるだろう。

(2) ここで取扱ったのは、面内曲げモーメントを受ける板の解析をおこない、少数の実験例と比較したにすぎない。今後の問題として次のような点が考えられる。

(a) 外力として板に作用する場合のもっとも一

般的な状態であると考えられる面内曲げモーメントとせん断力が連成して作用した状態における解析。

(b) 荷重 λ が増大するにつれて周辺における外力の作用が乱されている。これらによる境界条件をフラン

ジやスチフナーとの関連においてどのようにとりいれていくべきかの問題。

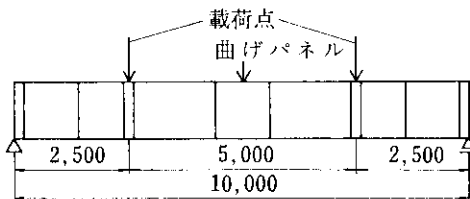
(c) たわみと荷重の関係を実際ではどのような関係になっているか。

など多く実験的な研究にまつところが多いと思われる。

表3 理論値と実験値の比較

	鋼材	降伏強度 (kg/cm ²)	細長比 (b/h)	実験値破壊時		Baslerの理論値 (kg/cm ²)	計算値	
				荷重 (kg/cm ²)	最大たわみ (mm)		荷重 (kg/cm ²)	最大たわみ (mm)
曲げパネル (パネル比=1)	A桁 SS41	2800	1200/4.5	2522	14	2699	2720	9.65
	B桁 HT60	5000	1200/4.5	* 4120	—	4750	4810	—
	C桁 HT60	5000	1200/6	4828	16	4750	4860	12.90

* この値に達した時他のパネルに破壊が生じた。



実験の概略図

本研究は筆者が京都大学工学部土木工学教室の小西教授および白石助教授のもとに、国内留学中に両先生の御指導によりまとめたものの一部であ

る。ここに両先生に深く感謝の意を表わすものである。

参 考 文 献

- 1) S. Levy : NACA Report, (1942), 737
- 2) J. M. Coan : J. Appl. Mechanics, (1951), 73
- 3) N. Yamaki : J. Appl. Mechanics, (1959), 26 ; (1960), 27
- 4) K. Basler and B. Thürlimann : Proc. of A. S. C. E., ST6, (1961)
- 5) K. Basler : Proc. of A. S. C. E., ST7, (1961)
- 6) K. Basler : Proc. of A. S. C. E., ST7, (1961)
- 7) K. C. Rockey and F. Jenkins : The Structural Engineer, (1957), 5
- 8) M. Skaloud : The Structural Engineer, (1962), 12
- 9) C. H. Massonnet : IABSE, (1940)
- 10) S. P. Timoshenko, J. M. Gere : Theory of Elastic Stability, 373~379[McGraw-Hill]
- 11) 小西, 白石, 渡辺 : 土木学会論文集第136号 (昭和41年12月)
- 12) 関西橋梁鉄骨溶接研究会 : プレートガーダーの耐荷力に関する理論と実験 1965年7月 60~118