川崎製鉄技報
KAWASAKI STEEL GIHO
Vol.7 (1975) No.2

製鉄所における数理計画法の利用
Utilization of Mathematical Programming at Steel Works

三平　武男(Takeo Mihira)

要旨：
NLP が LP に比べてなぜむづかしくなるかについて触れながら，数理計画法の中に占める LP の位置づけを明らかにした。また 0-1 型整数線型計画法の有用性についても述べた。数理計画法とよばれる技法の中で, 典型的 LP 以外の利用として, データ解析への LP の利用，パラメトリック LP，0-1 型整数線型計画法，2 次計画法，線型分数計画法の利用を製鉄所内に発生する問題を例にとり説明した。数理計画法は，現実に立脚したモデルの上で解を得てはじめて意味をもつものであり，そうでなければ，たとえ数学的意味はあっても，OR としての数理計画法としては意味がないと主張している。

Synopsis：
In explaining difficulties introduced by nonlinearities, this paper states the position of LP (linear programming) in the whole field of mathematical programming. The usefulness of 0-1 integer linear programming is also mentioned. The data analysis by using LP and other various examples at steel works by using parametric LP, 0-1 integer LP, quadratic programming and linear fractional programming are mentioned. The author emphasizes that the mathematical programming is "unvalued" unless it gains the solution on the real conditions even if "valuable" in the sense of mathematics.

本文は次のページから閲覧できます。

UDC 669.1.013:65.012.122

製鉄所における数理計画法の利用

Utilization of Mathematical Programming at Steel Works

三 平 武 男*
Takeo Mihira

Synopsis:

In explaining difficulties introduced by nonlinearities, this paper states the position of LP (linear programming) in the whole field of mathematical programming. The usefulness of 0-1 integer linear programming is also mentioned. The data analysis by using LP and other various examples at steel works by using parametric LP, 0-1 integer LP, quadratic programming and linear fractional programming are mentioned. The author emphasizes that the mathematical programming is "unvalued" unless it gains the solution on the real conditions even if "valuable" in the sense of mathematics.

1. はじめに

1973年末の石油ショック以来，省エネルギー，省資源問題が大きくクローズアップされ，新しいエネルギー開発研究とともに，限られた資源の有効利用問題が，OR（オペレーションズ・リサーチ），IE（インダストリアル・エンジニアリング）分野にも急増している。OR，IE 分野でのこれらの問題に対する解決技法をみると，大部分が LP (Linear Programming 線型計画法）に依存している。たとえば，1974年9月に東京で行われた鉄鋼連盟 IE 委員会主催の第16回システム設計分科会で，省資源，省エネルギー問題解決事例として発表された7社8件の事例中，6社が LP を適用した事例を発表しているといった状況である。

このように数理計画法の中で LP は最も使いやすい技法であり，普及された技法である。このLPを用いた一つの事例を詳細に紹介することは他に譲るとして，本報告では，数理計画法の中に占める LP の位置づけを明らかにし，数理計画法とよばれる技法の中で LP 以外の手法が，製鉄所の中でどのような問題に利用されるのかを述べてみたいと思う。

2. 数理計画法の体系

数理計画法とは，きわめて一般的な技法であり，与えられた制約条件の下で，目的関数を最大または最小にするための数学的方法である。この代表的なものが，いわゆる LP といわれるもので，制約条件式を1次不等式または1次方程式で表現し，目的関数を1次式で表現したものである。LP は数理計画法のモデルとして最も単純なものであるが，そのかわり一般解法が与えられて

* 千葉製鉄所企画部能率課兼臨時建設室課長

おり，それゆえ実際面で広く応用されている。しかし，LP にはつぎのような3つの大きな欠点がある。

（欠点1）：制約条件，目的関数ともすべて1次で表現しなければならない。

（欠点2）：時間的な要因を考慮できない。

（欠点3）：偶然変動を考慮できない。

LPモデルとしてのこれらの欠点をカバーする方向としては，1次という条件を一般化した NLP（Non Linear Programming 非線型計画法），時間的な要因を考慮して多段階決定の問題へと一般化した DP（Dynamic Programming 動的計画法），偶然変動を組み入れた SP（Stochastic Programming 確率的計画法）の3つの方向がある。本報告では，DP，SP には言及せず，LP，NLP をもう少し分解整理して述べていくことにする。図示するとつぎのようになる。

```
LP ─┬──→NLP （欠点1をカバーするもの）
    ├──→DP  （欠点2をカバーするもの）
    └──→SP  （欠点3をカバーするもの）
```

LP，NLP を定式化された問題の解法の差により分類してみる。まずは一般的ないわゆる LP があり，つぎにモデル構造そのものは本質的に変らないが，制約となっている量，あるいは目的関数の係数などのみが変化する場合，すでに得られた LP の解を基にして，これらの変化に応じた最適解を求める方法としての PLP（Parametric LP，パラメトリック線型計画法）があり，さらに変数に整数値条件がつけられた ILP（Integer LP，整数線型計画法）がある。この ILP は，一部の変数にのみ整数値条件がつけられた Mixed ILP（混合型整数線型計画法）と，全変数に整数値条件がつけられた All ILP（全整数型線型計画法）とがある。とくに整数値が0か1のみの場合は，0－1 ILP（0－1型整数線型計画法）とよばれ，最近脚光をあびている。これらの手法のいずれにしろ，制約式，目的関数に1次の制限がついていることに変わりはなく，したがってこれらの問題はすべて LP の範ちゅうに属するものである。現実の問題に出てくる1次式でない複雑な関係を LP の範囲で扱うためには，線型近似をしなければならない。この際，計算のわずらわしさを重視すれば，粗雑な近似でがまんすることとなり，精度よい近似を行うため，非線型区間をいくつかの線型区間で分けてしまうと，何回も試行錯誤的に LP 計算をくり返すことになりかねない。線型近似以外で最も簡単なのは2次式による近似である。近似問題ばかりでなく，現実の問題で2次式で表現されるものも多い。制約式が1次式で，目的関数が2次式で表わされる問題は QP（Quadratic Programming 2次計画法）の問題とよばれる。これは，Wolfe の解法とか，Beal の解法とか，Hildreth の解法とか多数開発されているが，すべての QP 問題が解けるわけではない。

一般に，制約式や目的関数の中に，少なくとも一つの非線型な関係を含む計画問題はすべて NLPの問題とよばれている。NLPの解法が LPの解法に比較して飛躍的に困難になるのは，LP のもつつぎの性質の一部または全部が NLP の場合には犯されてしまうからである。

（性質1）：実行可能解の集合は凸集合であり，これは有限個の頂点をもつ。

（性質2）：最適値があるときは，上述の頂点の少なくとも一つが最適解を与える。

（性質3）：局所的最適性が全域的最適性に一致する。

NLP の場合，（性質1）が成立しない例は容易に判るが，（性質2），（性質3）が犯されることも Hadley[1] はつぎのような簡単な例で示している。今，制限条件式を

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &\leqq 6\\
x_1-x_2 &\leqq 1\\
2x_1+x_2 &\geqq 6\\
0.5x_1-x_2 &\geqq -4\\
x_1\geqq 1,\ & x_2\geqq 0
\end{aligned}
$$

として，目的関数 z，

$$z=10\ (x_1-3.5)^2+20\ (x_2-4)^2$$

を最小にする問題を考えてみると，これは **Fig. 1** に示すように，最適解は $x_1{}^*=2.5$，$x_2{}^*=3.5$ であり，実行可能解の凸集合の頂点ではなく，境界

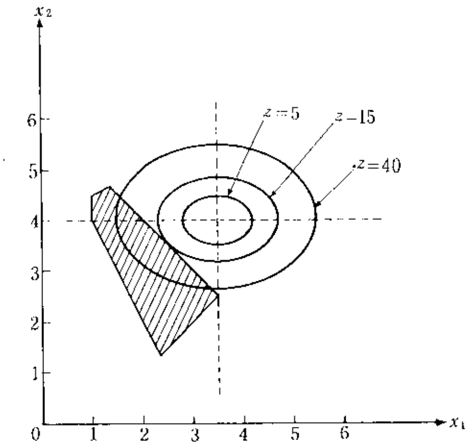

Fig. 1 Optimum value of the objective function lies on the boundary of the convex set of feasible solutions, but it is not an extreme point of this set

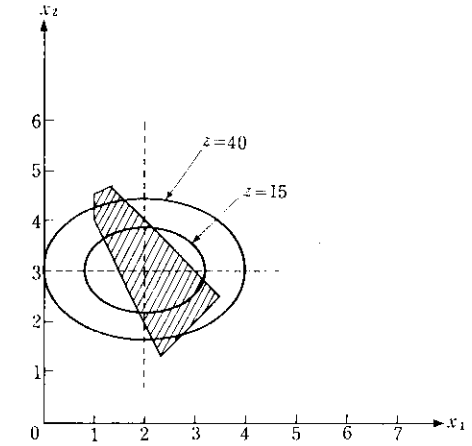

Fig. 2 Optimum value of the objective function can be made to occur at an interior point of the convex set of feasible solutions

辺上にきていることがわかる。また全く同様の制限条件式下で，目的関数 z，

$$z=10\ (x_1-2)^2+20\ (x_2-3)^2$$

を最小にする問題を考えると，これは **Fig. 2** に示すように，最適解は $x_1{}^*=2$，$x_2{}^*=3$ であり，実行可能解の頂点でもなく，境界辺上でもなく，最適解が内点にある例であることがわかる。（性質3）が犯される例としては，つぎのような例が挙げられている。制限条件式が

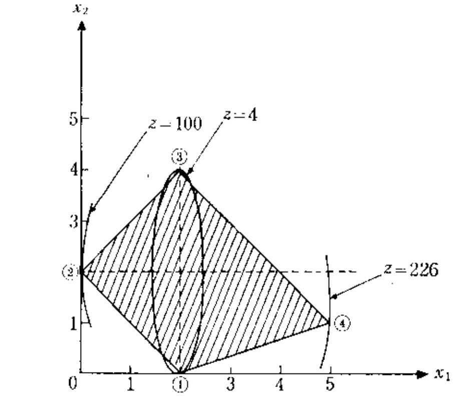

Fig. 3 An example of local optimum is not a global optimum

$$x_1+x_2\geqq 2$$
$$x_1-x_2\geqq -2$$
$$x_1+x_2\leqq 6$$
$$x_1-3x_2\leqq 2$$
$$x_1,\ x_2\geqq 0$$

の下で目的関数 z，

$$z=25\ (x_1-2)^2+\ (x_2-2)^2$$

を最大にする問題を考える。**Fig. 3** に示すように②の点（$x_1=0$，$x_2=2$）は，局所最適解であるが，これは全体の最適解ではなく，この問題の最適解は④の点（$x_1{}^*=5$，$x_2{}^*=1$）である。

制約式や目的関数がある種の凸（凹）性の条件をみたしているときは，上記の（性質3）が保証され解法が一般化される。このような凸（凹）性の条件を満たしている問題をとくにC(C)P {Convex (Concave) Programming 凸（凹）型計画法} の問題とよんでいる。

目的関数が分数式で表わされる問題は FP (Fractional Programming 分数計画法）とよばれている。とくに，分母，分子がそれぞれ1次式の分数式で表わされ，制約式が1次式の場合は，LFP (Linear Fractional Programming 線型分数計画法）の問題とよばれ，NLP の解法の範囲でも扱えるが，後述のように変数変換して LP の問題として解くこともできる。

その他，最適値探索法として最も効率がよいであろう方向へ進む GM (Gradient Method 山登り法）などがある。

- LP
  - LP
  - PLP
  - ILP
    - All ILP
    - Mixed ILP
    - 0-1 ILP
  - ……
  - ……
- NLP
  - QP
  - CP
  - FP
    - FP
    - LFP
  - ……
  - ……

Fig. 4 The structure of mathematical programming used at the steel works

以上をまとめると **Fig. 4** のようになる。

3. LP (Linear Programming 線型計画法) の利用

3·1 典型的LP問題への利用

当社で開発した『販売生産計画総合策定システム』は，その中に鋼塊原価算定サブシステム，原価編集サブシステムを含み，歩止，合格率の条件，販売制約条件，生産能率制約条件など各種制約条件の下で，各鋼塊規模に応じた利益最大とする品種別販売計画をLPにより求め，得られた最適解を出発点として，さらに現実に近づける目的で限界利益をキーとして調整してゆくロジックを有している。この調整案が営業の実際の販売計画のベースとなるわけである。これにより期間の工場生産計画の大枠は定まってくる。この目標値に対して，実際の受注活動，生産活動が日々行われ，工場生産計画の内容が具体化されてくる。すなわち，工場では，利益最大化計画の下で受注された各鋼種を，いかに安く生産するかというところからはじまる。

工場では，鋼種別生産量が与えられたとき，どのルートで何を何トン生産するかという工程ルート決定問題（具体的には分塊，連続鋳造工程まで）としてLPが利用されている。具体的には **Table 1** に示すように，鋼種を22種に分類し，4種のルートへの配分問題として扱っている。それぞれの鋼種につき，生産すべき量 x_{i0}（スラブトン数）が与えられたとき，第1製鋼工場と第2製鋼工場とへの配分，さらに製鋼工場が定ったとき，連続鋳造か，分塊かの配分をどうすれば一番コストが安いかといった問題として扱われる。**Table 1** より，基本的には変数の数は88（=22×4）個であるが，実際は連続鋳造のモールドサイズ別稼動時間制限を付加していることから，連鋳材のある鋼種については，さらに4つに変数を分割したため，162変数の問題となっている。

一方，条件式は $\sum_{j=1}^{4} x_{ij}=x_{i0}$ なるタイプだけで22個（$i=1, 2, \cdots, 22$）あるが，生産すべき量 x_{i0} に幅がある場合（最小 $x_{i0,\mathrm{MIN}}$，最大 $x_{i0,\mathrm{MAX}}$）を考慮して，$x_{i0,\mathrm{MIN}} \leqq \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leqq x_{i0,\mathrm{MAX}}$ で考えたため44個となり，さらに，第1，第2製鋼工場能力，第1，第2連続鋳造設備のモールドサイズ別稼動時間制限，真空脱ガス能力制限，分塊能力制限，下注ぎ能力制限およびモールドサイズ別に分割された連鋳トン数をまとめる式など合わせて

Table 1 Notation of variables (I)

Kinds of steel \ Route	No. 1 BOF shop		No. 2 BOF shop		Production tonnage
	Slabbing mill	Continuous casting machine	Slabbing mill	Continuous casting machine	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{10}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{20}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	x_{i0}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
22	$x_{22.1}$	$x_{22.2}$	$x_{22.3}$	$x_{22.4}$	$x_{22.0}$

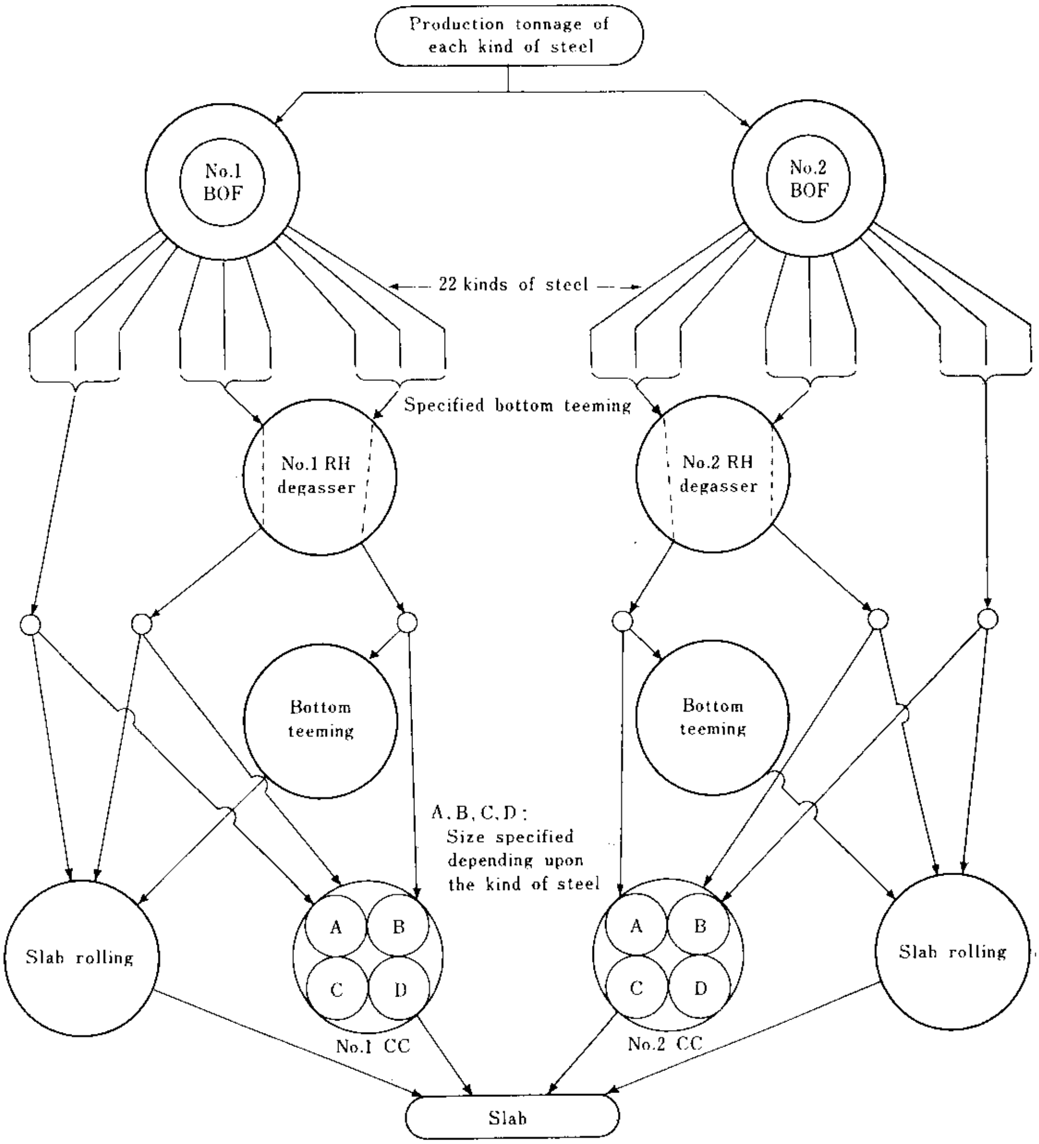

Fig. 5 Diagram of steelmaking process

120条件式よりなっている。目的関数は，第 i 鋼種第 j ルートのダイレクトコストを c_{ij} として $\sum_{i=1}^{22}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}\,x_{ij}\longrightarrow$最小で表現される。計算は条件式の数 468，変数の数 940 まで可能な LP プログラムで毎週行われている。この結果が，ルート別オーダ投入時のベースになっている。**Fig. 5** に以上の流れの概略を示す。

販売生産計画面への LP の適用について述べたが，このほか原料購入面でも，鉄鉱石購買計画法，原料炭購買計画法等に古くから LP が使用されている。

3·2 データ解析への LP の利用

製鉄所に限らず，どこにでも存在する作業測定問題に対し，LP を用いて標準値を求める方法がある。**Table 2** に示すように，各業務の処理件数と，それに要した総所要時間のデータが N ケあり，これから各業務ごとの所要時間値 a_1, a_2,

Table 2 Notation of variables (II)

Period	Total needed time	Number of completed matters of each job (job number $=k$)
1	Y_1	$X_{11},\ X_{12},\ \cdots\cdots\cdots,\ X_{1k}$
2	Y_2	$X_{21},\ X_{22},\ \cdots\cdots\cdots,\ X_{2k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ ,\ \vdots$
N	Y_N	$X_{N1},\ X_{N2},\ \cdots\cdots\cdots,\ X_{nk}$

a_3, ……, a_kを推定する問題を考えよう。誤差項を ε_i で表現し,

$$Y_i=a_0+a_1X_{i1}+a_2X_{i2}+\cdots\cdots+a_kX_{ik}+\varepsilon_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots N)$$

として, $\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^2$を最小にするように a_0, a_1, …, a_k を定めようとするのは, 自然な考え方である。いわゆる最小2乗法である。このとき$a_i \geqq 0$の保証はないが, $a_i \geqq 0$の条件を加えると QP として解くことになる。

この問題をLPとして解く一つの方法は, すべての ε_i が負にならないとして, $\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i$ を最小にする方法である。これは, a_1, a_2, ……, a_k をそれぞれ最善の場合に対する時間値(ある意味での標準値)として考え, 実際に測定された Y_i がつねに0または正の偏差を含むという意味づけを与えている。「モデルにどのような意味づけが与えられるか」あるいは,「最小2乗法を含んだ最大推定法とLP定式化法との関係はどのようなものか」については, すでに明確にされている[2)]。

4. PLP (Parametric LP パラメトリック線型計画法) の利用

現在の千葉製鉄所の製鋼工場は, 転炉工場だけであるが, 合理化の過程では平炉と転炉が共存した時代があった。平炉, 転炉とも, そのコストは溶銑配合比に大きく左右された。そこで, 平炉と2つの転炉(小型, 大型)により出鋼される鋼のダイレクトコストをそれぞれ c_H, c_S, c_L とし, それらを溶銑配合比の関数として求めた。一方, 千葉製鉄所全体で出鋼すべき量を長期的に展望し, それぞれの時点において, 平炉, 小型転炉, 大型転炉への出鋼配分をどのように行うか, 溶銑配合比を変えることにより, 同一出鋼量に対する千葉製鉄所の総鋼塊コストがどのように変化するかをLPモデルにより求めた。平炉, 小型転炉, 大型転炉の出鋼量を, それぞれ x_H, x_S, x_L とし, 目的関数 $c_H x_H+c_S x_S+c_L x_L$ を最小とするものであるが, 溶銑配合比を変えることにより, 目的関数の係数 c_H, c_S, c_L が変化するため, PLPとして扱った。これらの結果を基礎として, 千葉製鉄所の出銑増強計画が行われた。

PLPのほかの利用例として, 厚板材料試験用試材加工能力向上を目的として, 生産フライス, シェーパーなどをどのように使えばよいかを, 曲げ試験用試材加工本数をパラメータにして, 引張試験用試材加工本数を最大化するPLPモデルで解析した事例が発表されている[3)]。

5. 0-1 ILP (0-1 Integer LP 0-1型整数線型計画法) の利用

ORの一つの手法としてLPが導入されたときから, LPにおける計算上の未解決の問題の一つとして残されたのは, 整数値しかとらない変数があるとき, 最適な整数解をどのようにして見つけるかということであった。整数条件を除いて得られる解は, 一般には整数条件を満足しない。しかし, この解を適当な方法で"丸め"(たとえば, 四捨五入)整数解を得れば, 整数問題としての最適解, あるいはそれに近い解を求めることが可能であるかも知れない。0-1 ILPとは, この整数線型計画問題の特殊なケースとして, 各変数は0か1かのどちらかの一方の値しかとらないLPのことをいう。0-1変数の場合には, 上述の丸めるという操作は意味をなさない。たとえば, $x_j=0.5$ のとき, x_j を1とするか, 0とするかの決定は困難であろう。

この0-1 ILPが必要になる理由は, 0-1変数を用いることにより定式化が容易になる問題があること, 通常のLPでは解けないが, 0-1 ILPでは定式化可能なことなどによる。たとえば, 製銑原料配合計画で, ある銘柄を配合する場合は, あるトン数以上を配合したい(ゼロでもよい)といった問題は, 通常のLPではなく, 0-1 ILPが必要となってくる。すなわち, ある銘柄の配合トン数

x は，全然配合しないか，配合する場合は L トン以上，M トン以下という条件を定式化するには通常の LP では不可能である。これが，0-1 ILP では可能になる。このことを示す前に，任意の All-ILP 問題は，0-1 ILP 問題に変換できることを付記しておく。たとえば，正整数変数 x_j に対し，d_j を

$$d_j=\begin{cases}1 & x_j>0\\ 0 & x_j=0\end{cases}$$

なる 0-1 変数とし

$$x_1\leqq 5\,d_1$$
$$x_2\leqq 4\,d_2$$
$$x_3\leqq 3\,d_3$$

なる条件式があるとき，Balas binary device による変数 x_j の 0-1 への変換法は，5 は 2 進法では101であり，4 は 100 であり，3 は 11 であるため，

$$4\,\omega_1+2\,\omega_2+\omega_3=x_1$$
$$4\,\omega_4+2\,\omega_5+\omega_6=x_2$$
$$2\,\omega_7+\omega_8=x_3$$
$$\omega_9=d_1$$
$$\omega_{10}=d_2$$
$$\omega_{11}=d_3$$
$$\omega_i=0 \text{ or } 1$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 11)$$

として，この型で上式の条件式に代入するわけである。

さて，前述の配合計画問題の定式化を考えよう。

(1) 最初の条件は，$L\leqq x\leqq M$ または $x=0$（x は実数）

(2) (1)の問題を，配合計画問題としては，x を整数と扱ってもさしつかえない。

(3) (2)はさらに $L\delta\leqq x\leqq M\delta$ $\delta=0$ or 1 と書き直すことができる。

(4) 整数変数 x につき，上に述べた Balas binary device により x を 0 または 1 の変数 ω_i の和の型式で書く。

以上により，LP では不可能な問題が 0-1 ILP で定式化されることになる。

つぎに，鉱石船の製鉄所間配分問題を具体的に 0-1 問題として定式化してみる。当社の製鉄所は千葉製鉄所と水島製鉄所との 2 つであり，したがって当社向け鉄鉱石積載船は，千葉か水島かのいずれかに入港する。いま，**Table 3** のような入船計画に対し，1 隻ずつ千葉か水島かを示す指標として，n 隻目の船に対してであれば x_n という変数を考え，千葉向けの場合 $x_n=1$，水島向けの場合 $x_n=0$ をとるものとする。制限条件，目的関数を x_n の 1 次式で表現できれば 0-1 ILP として定式化されたことになる。

Table 3 Notation of variables (III)

Ship No.	1	2	……	n	……	N
Name of ore	i_1	i_2	………	i_n		i_N
Weight	z_1	z_2		z_n		z_N
Arrival date	d_1	d_2		d_n		d_N

(1) 量の確保のための制限条件

塊 $\sum b(i_n)\cdot z_n\cdot x_n\geqq X_L$

$\sum b(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)\geqq Y_L$

粉 $\sum c(i_n)\cdot z_n\cdot x_n\geqq X_F$

$\sum c(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)\geqq Y_F$

$a_j(i_n)$；i_n 銘柄の j 成分比率

$b(i_n)$；i_n 銘柄の塊比率

$c(i_n)$；i_n 銘柄の粉比率

X_L, Y_L；千葉，水島の塊最低必要量

X_F, Y_F；千葉，水島の粉最低必要量

(2) 成分許容範囲に入れるための制限条件

j 成分について

$T_{j\,\mathrm{upper}}\cdot\sum z_n\cdot x_n\geqq\sum a_j(i_n)\cdot z_n\cdot x_n\geqq\sum T_{j\,\mathrm{lower}}$

$\sum z_n\cdot x_n$

$U_{j\,\mathrm{upper}}\cdot\sum z_n\cdot(1-x_n)\geqq\sum a_j\,(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)$

$\geqq U_{j\,\mathrm{lower}}\cdot\sum z_n\cdot(1-x_n)$

$T_{j\,\mathrm{upper}}$, $U_{j\,\mathrm{upper}}$；千葉，水島の j 成分の期間平均の上限

$T_{j\,\mathrm{lower}}$, $U_{j\,\mathrm{lower}}$；千葉，水島の j 成分の期間平均の下限

j 成分以外のほかの成分についても同様の制限式を加える。

(3) 時系列考慮を加えた量の確保のための制限条件

塊 $\begin{cases}\sum\limits_{1ヶ月} b\,(i_n)\cdot z_n\cdot x_n\geqq X_{LM1}\\ \sum\limits_{1ヶ月} b\,(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)\geqq Y_{LM1}\end{cases}$

$$\begin{cases}\sum_{2ヶ月} b(i_n)\cdot z_n\cdot x_n \geqq X_{LM2}\\ \sum_{2ヶ月} b(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)\geqq Y_{LM2}\end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{cases}\sum_{kヶ月} b(i_n)\cdot z_n\cdot x_n \geqq X_{LMk}\\ \sum_{kヶ月} b(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)\geqq Y_{LMk}\end{cases}$$

ここに

X_{LM1}, Y_{LM1}；千葉，水島の塊最低所要量（期初より1ヶ月について）

X_{LM2}, Y_{LM2}；千葉，水島の塊最低所要量（期初より2ヶ月について）

$\vdots \qquad \vdots$

X_{LMk}, Y_{LMk}；千葉，水島の塊最低所要量（期初より k ヶ月について）

である。

粉についても塊と同様の条件を導入することになる。

(4) 時系列考慮を加えた成分の確保のための制限条件

j 成分について

$$\begin{cases}T_{j\,\mathrm{upper}\,M1}\cdot\sum_{1ヶ月} z_n\cdot x_n \geqq \sum_{1ヶ月} a_j(i_n)\cdot z_n\cdot x_n\\ \qquad \geqq T_{j\,\mathrm{lower}\,M1}\cdot\sum_{1ヶ月} z_n\cdot x_n\\ U_{j\,\mathrm{upper}\,M1}\cdot\sum_{1ヶ月} z_n(1-x_n)\geqq \sum_{1ヶ月} a_j(i_n)\cdot z_n(1-x_n)\\ \qquad \geqq U_{j\,\mathrm{lower}\,M1}\cdot\sum_{1ヶ月} z_n\cdot(1-x_n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}T_{j\,\mathrm{upper}\,M2}\cdot\sum_{2ヶ月} z_n\cdot x_n \geqq \sum_{2ヶ月} a_j(i_n)\cdot z_n\cdot x_n\\ \qquad \geqq T_{j\,\mathrm{lower}\,M2}\cdot\sum_{2ヶ月} z_n\cdot x_n\\ U_{j\,\mathrm{upper}\,M2}\cdot\sum_{2ヶ月} z_n(1-x_n)\geqq \sum_{2ヶ月} a_j(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)\\ \qquad \geqq U_{j\,\mathrm{lower}\,M2}\cdot\sum_{2ヶ月} z_n\cdot(1-x_n)\end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{cases}T_{j\,\mathrm{upper}\,Mk}\cdot\sum_{kヶ月} z_n\cdot x_n \geqq \sum_{kヶ月} a_j(i_n)\cdot z_n\cdot x_n\\ \qquad \geqq T_{j\,\mathrm{lower}\,Mk}\cdot\sum_{kヶ月} z_n\cdot x_n\\ U_{j\,\mathrm{upper}\,Mk}\cdot\sum_{kヶ月} z_n(1-x_n)\geqq \sum_{kヶ月} a_j(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)\\ \qquad \geqq U_{j\,\mathrm{lower}\,Mk}\cdot\sum_{kヶ月} z_n\cdot(1-x_n)\end{cases}$$

ここに

$T_{j\,\mathrm{upper}\,M1}$, $U_{j\,\mathrm{upper}\,M1}$；千葉，水島の j 成分の上限（期初より1ヶ月間について）

$T_{j\,\mathrm{lower}\,M1}$, $U_{j\,\mathrm{lower}\,M1}$；千葉，水島の j 成分の下限（期初より1ヶ月間について）

$\vdots \qquad \vdots$

$T_{j\,\mathrm{upper}\,Mk}$, $U_{j\,\mathrm{upper}\,Mk}$；千葉，水島の j 成分の上限（期初より k ヶ月間の累積について）

$T_{j\,\mathrm{lower}\,Mk}$, $U_{j\,\mathrm{lower}\,Mk}$；千葉，水島の j 成分の下限（期初より k ヶ月間の累積について）

j 成分以外のほかの成分についても同様の制限式を加える。

(5) 目的関数

目的関数をいかに設定するか，すなわち何をもって最適とするかということと，その最適性を測るメジャー（measure）をどう導入するかということを解決しなければならない。この問題に対しては，千葉，水島のトータルフレイトを最小にするとか，銘柄別在庫日数を均等化するとか，いろいろな考え方があるが，ここでは，千葉，水島のそれぞれの成分目標値に対する差を最小にする計画をもって最適とすることにする。制限式としてさらに次式を加える。

$$T_j\cdot\sum z_n\cdot x_n+\Delta\alpha_{1j}+\Delta^2\alpha_{2j}+\cdots+\Delta^i\alpha_{ij}$$
$$\geqq \sum a_j(i_n)\cdot z_n\cdot x_n$$
$$\geqq T_j\cdot\sum z_n\cdot x_n-(\Delta\alpha_{1j}+\Delta^2\alpha_{2j}+\cdots+\Delta^i\alpha_{ij})$$
$$U_j\cdot\sum z_n\cdot(1-x_n)+\Delta\alpha_{1j}+\Delta^2\alpha_{2j}+\cdots+\Delta^i\alpha_{ij}$$
$$\geqq \sum a_j(i_n)\cdot z_n\cdot(1-x_n)$$
$$\geqq U_j\cdot\sum z_n\cdot(1-x_n)-(\Delta\alpha_{1j}+\Delta^2\alpha_{2j}+\cdots+\Delta^i d_{ij})$$

T_j, U_j；千葉，水島の j 成分の目標値

Δ；ある正定数

$\alpha_{1j}\sim\alpha_{ij}$；新しく導入する変数0または1（$i$ は適当な正整数まで）

j 成分以外のほかの成分についても同様の制限式を加える。そして，目的関数を

$$\sum\omega_j(\Delta\alpha_{1j}+\Delta^2\alpha_{2j}+\cdots\cdots+\Delta^i\alpha_{ij})\rightarrow M_{in}$$

ω_j；j 成分に対するウエイトづけ

として表現することにより0-1 ILP として定式化されたことになる。

その他，原料ヤードの複雑なベルトコンベアのスケジューリング問題も0-1 ILP として解かれている。さらに Ashore ら[4]は，スケジューリング問題，ラインバランス問題，資金配分問題等典型的組合せ問題を一般的に定式化したのち，これらを0-1 ILP に変換して定式化しなおした論文を発表している。

当社の0-1 ILP プログラムは，Byrne ら[5]のプログラムを参考にして1970年作成された。さらにオペレーションズ・リサーチ誌[6]を参考にして，

1971年プログラム改良を行った。改良成果をPritskerら[7,8]の論文中の例題につき確認したところ，計算時間は1/10に短縮された。茨木[6]は，整数問題においてアルゴリズムを比較する際に注意すべきこととして，問題のタイプによりアルゴリズムの振舞が非常に異なり，したがって一部の問題に対する結果から全体を判断するのは早計であると述べている。Implicit Enumeration法[6]の計算時間は，部分問題のテスト法と，分枝変数の決定法に左右される。筆者らの改良は，有効なテスト法を追加したことにより時間短縮されたもので，問題のタイプを問わず効果を挙げることができた。

0-1 ILP の問題点を挙げると，

(1) 変数の数が膨大になりやすいこと

(2) 変数の定義の仕方にくふうを要すること

(3) すぐれたアルゴリズムがはっきりしないこと

などがある。(1)については，前述の Balas binary device により6変数が11変数になっていることをみてもわかる。(2)については，たとえば，Pritsker の論文にみられるように，Bowman formulation[9]に従えば，72変数，125条件式になるものを，33変数，37条件式に減らし得るといった具合である。このように(3)の問題点を含めて，ある意味では今後が楽しみな分野である。

6. QP (Quadratic Programming 2次計画法) の利用

3·2 で QP 問題が生ずる例はすでに触れた。ここでは，3·2とはちがったタイプの QP 例を示す。省エネルギー問題の一環として，つぎのような問題を扱っている。与えられた出銑計画を達成する範囲で，高炉別出銑量をどのように定めれば全社の高炉の燃料費が最低となるか。また，最適条件下での千葉，水島の重油配合比はどうなるか。この問題は，個々の高炉には外的条件（たとえば，どの焼結工場で生産される焼結が装入されるかとか，特殊銑鉄を吹製する必要があるかといった，高炉設備そのもの以外の条件），内的条件（たとえば，高炉プロフィルとか，高圧設備がないといった，高炉そのものからくる条件）の差があることにより，それぞれ特性があり，その特性をできる限り有効に利用しようという思想から生まれている。この問題を解くため，出銑量および燃料費に影響をおよぼす要因 x_1, x_2, ……, x_n をリストし，各高炉別に，燃料費関数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，出銑量関数 $F_i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ($i=1, 2, \cdots, N$, N：高炉本数）を導き，酸素供給量制限，重油供給量制限，稼働率制限，その他の制限条件の下で総燃料費 $\sum_{i=1}^{N} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\cdot F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を最小にする問題として定式化した。このとき，制限条件式がすべて1次で，燃料費関数 f および出銑量関数 F も x_1, x_2, ……, x_n の1次式で表現されたとき，目的関数がそれらの積であることから，LP ではなく QP の問題となる。

QP の最適解を見出す数値解法は，任意の局所最適解が全域的最適解に一致するとき以外には見出されていない。目的関数が凹関数の場合は，局所的最大値が全域的最大値に一致するため，最大値問題は解くことができる。目的関係が凸関数の場合は，最小値問題は解くことができる。

7. LFP (Linear Fractional Programming 線型分数計画法) の利用

目的関数が分数式で表わされる問題は FP といわれ，とくに分母，分子がそれぞれ1次式の分数式で表わされ，制約式が1次式の場合は，LFPとよばれることはすでに述べた。LFPの場合，目的関数の分母を新しい変数 z に置き換え，$1/z$ および，z を分母にもつ変数項を，さらに新しい変数に置換することにより LP の問題として解ける[10]。

ＬＦＰの利用例としては，つぎのようなものがある。電力料金は，夏期と冬期，平日と日曜・祝祭日，昼間と夜間および尖頭時など，それぞれ時期，日，時間帯により異なっている。したがって，契約条件，社内条件を満足する範囲で，いつ，どの時間帯に，どれだけの電力量を使用（＝契約）すればよいかという問題が発生する。契約条件，社内条件がすべて線型で表現されたとしよう。今仮りに，目的関数を契約単価を最小にするものとしてとらえることにする。契約単価は，契約料金を契約電力量で割ったものであるから，目

的関数は，分子が時期別，時間帯別単価に，それぞれの契約電力量をかけた和であり，分母が時期別，時間帯別契約電力量の和として表現される LFP の問題として定式化されることになる，その他トン当りコスト等単位量当りの変量を，最小または最大にする問題に対して LFP は有効である。

8. おわりに

以上LP以外の手法を含めて，数理計画法といわれる手法が，製鉄所の中でどのような問題に利用されるかを述べた。数理計画法の問題を最も一般的な形で表現すると，それは制限条件つきの最大最小問題を具体的に解くことといえる。この意味では，数理計画法の範ちゅうは，2章で述べたより広く，その体系もまた変ったものとして表現されよう。一方，ILP をはじめとする離散的計画法，あるいは組合せ論的方法，あるいは DP，さらに SP，統計的決定理論などの問題は，有限次元の連続変量についての制限つき最大最小問題という意味での数理計画法の問題とはかなり違った論理構造をもつため，狭義の数理計画法から除外される場合もある。2章で述べた体系は，学問的観点からみて整理分類したのではなく，製鉄所で使用される数理計画技法を著者が大胆に分類したものに過ぎない。

数理計画モデルを活用する際，注意しなければならないことは，技法そのものの興味にとらわれてはいけないことである。抽象数学のような芸術性のある仕事ではなくて，なんといっても生々しい現実に立脚した仕事であると認識すべきである。実用のための技法なのであり，したがって，そのモデルは現実からのきびしいチェックをたえず受けている。常に現実にしっかり立って，そこにモデルを構築しなければならない。また，技法そのものを探求する場合にも同様である。「解けない」ということが証明されても，それは数学上の定理としては興味あるものであっても数理計画法の答とはならないことを認識する必要がある。現実が厳然として存在しているからである。数学モデルの宝庫ともいえる製鉄所では，今後も数理計画法にかけられる期待は大きいであろう。

参考文献

1) G. Hadley : Nonlinear and Dynamic Programming, (1964), **10** [Addison-Wesley]
2) 木村幸信：IE Review, **7** (1966) 5, 261
3) 三平武男：鉄連IE委員会，第13回IE事例研究会，(1964)
4) S. Ashour and A. R Char : J. Operations Research Society of Japan, **13** (1970) 2, 78
5) J. L. Byrne and L. G. Proll : Communications of the ACM, **11** (1968) 11, 782
6) 茨木俊秀：オペレーションズ・リサーチ，**15** (1970) 11, 51
7) A. B. Pritsker, L. J. Watters and P. M. Wolfe : Management Science, **16** (1969) 1, 93
8) 三平武男：鉄連IE委員会，第38回IE事例研究会，(1971)
9) E. H. Bowman : Operations Research, **7** (1959) 5, 621
10) A. Charnes, and W. W. Cooper : NAVAL Research Logistics, **9** (1962), 181