
圧粉体におけるひずみと応力の理論

Theoretical Treatments of Stress and Strain in Green Compacts of Powder

岸高 壽(Hisashi Kishitaka)

要旨：

圧粉体の見かけ上均一なひずみをともしう変形について、その変形によって生ずる応力と、粒子間接触面のまさつ係数、粒子自身のせん断降伏応力、圧粉体の気孔率、および粒子間のからみ合いの不足を表わす係数とを関係づける理論式が導かれた。圧粉体のスプリングバック現象が有効弾性ひずみの考慮のもとにこの理論によって説明された。理論式から計算された圧縮曲線は各種の鉄粉についての実験結果と定性的に一致した。

Synopsis：

On the deformation of green compacts with an apparently uniform strain, theoretical equations have been introduced whereby the stress caused by the deformation, the coefficient of friction at the contact surface between powder particles, the shearing yield stress of particles themselves, the porosity of the compact, and the degree of connection inter particles, are all correlated. The spring back phenomenon of green compacts is explained by this theory in consideration of the effective elastic strain. The compression curves calculated by the theoretical equation agree qualitatively with experimental results obtained from various kinds of iron powders.

(c)JFE Steel Corporation, 2003

本文は次のページから閲覧できます。

圧粉体におけるひずみと応力の理論

Theoretical Treatments of Stress and Strain in Green Compacts of Powder

岸 高 壽*

Hisashi Kishitaka

Synopsis :

On the deformation of green compacts with an apparently uniform strain, theoretical equations have been introduced whereby the stress caused by the deformation, the coefficient of friction at the contact surface between powder particles, the shearing yield stress of particles themselves, the porosity of the compact, and the degree of connection inter particles, are all correlated.

The spring back phenomenon of green compacts is explained by this theory in consideration of the effective elastic strain.

The compression curves calculated by the theoretical equation agree qualitatively with experimental results obtained from various kinds of iron powders.

1. 序 論

粉末から焼結製品をつくる場合、通常は粉末を金型中で圧縮して一定の形状のものをつくりこれを加熱して焼結させる方法がとられる。この焼結する以前の一定の形状をもった中間製品が圧粉体とよばれるものである。この圧粉体に関しては金型中で粉末が圧縮される際の粒子の詰めこみのされやすさを示す圧縮性、圧粉体と金型内面とのまさつ力の大きさ、および圧粉体の機械的強度、の三つが重要な特性と考えられている。本論文はこのような特性と粉末の性質との関係を統一的に説明するために圧粉体におけるひずみと応力の関係を理論的に整理したものである。

ここで圧粉体がどのような状態にあるかという点について考えてみよう。圧縮成形される以前の粉末の集積体は小さな外力によっても容易に流動

的に変形する液体に類似した性質をもっている。これに対して圧粉体は外力に対してその形状を保持しようとする固体的な性質をもっている。しかし圧粉体は粒子の集合体であり個々の粒子は互いに接触しているだけで物質的なつながりはない。また粒子間には空隙もありその形状を保つ力は主として粒子相互間のからみ合いとまさつ力によるものである。

通常の連続物体はその塑性変形において構成物質のずれ変形のみを考えればよい。これに対して圧粉体においては粉末粒子自身の塑性変形のほかに粒子相互の接触面におけるすべりを考える必要がある。本論文はこのような考えにもとづいて粉末粒子を構成する物質の弾性変形、塑性変形、および粒子相互の接触面のすべりまさつについてひずみと応力の関係を静力学的に取り扱い、圧粉体の見かけ上のひずみと応力の関係を説明しようとするものである。

* 技術研究所次長

2. 不連続すべり面をもつ物体のひずみと応力

ここでは圧粉体のようにその内部に粒子間の接触面のような不連続すべり面をもつ物体の全体としての(見かけ上の)変形におけるひずみと応力の関係について一般的な取り扱い方をのべることにする。そしてここでは平均的なひずみと応力を問題をとする。

2.1 一般理論¹⁾

均等な、すなわちその物体の内部において各点の変位ベクトルの成分の直交座標系におけるすべての一次の微分係数が一定の値をもつような変形をする三次元物体のひずみは、一つの二階テンソルによって表わすことができる。そして任意のひずみテンソルは互いに独立な基本ひずみテンソルの和に分解することが可能である。このような均等な変形はねじれひずみを含まないから、この独立な基本ひずみとして考えられるのは一様な体積変化と三つの独立なずれである。そしてこの基本ひずみテンソルの各成分は、0または各々の基本ひずみについて一定の絶対値とそのひずみの方向によって定まる正または負の符号をもった値をとる。

本論文においてはのちにのべるように弾性変形の応力と塑性変形の応力を統一的に取り扱う必要がある。しかるに弾性変形の応力はひずみの大きさと方向によって定まり、一方において塑性変形の応力はひずみの方向のみによって定まるので、各々の基本ひずみのテンソルを、ひずみの大きさを表わす数値とその方向を表わす0または±1の成分をもったテンソルとの積として表わすことにする。この方法によれば任意のひずみを表わすテンソルの成分は次の式で与えられる。

$$S_{ij} = S^{(1)}\phi_{ij}^{(1)} + S^{(2)}\phi_{ij}^{(2)} + S^{(3)}\phi_{ij}^{(3)} + S^{(4)}\phi_{ij}^{(4)} \quad (1)$$

ここにおいて

S_{ij} : 直交座標系におけるひずみテンソルの成分 $i, j = x, y, \text{ or } z$

$S^{(1)}$: 体積変化のひずみの大きさ

$S^{(2)}, S^{(3)}, S^{(4)}$: ずれのひずみの大きさ

$\phi_{ij}^{(1)}$: 体積変化の向きを表わすテンソルの成分で $i \neq j$ の場合は0, $i = j$ の場合はすべてが+1または-1のいずれかの値をとり、正の場合は膨張を負の場合は収縮を表わしている。

$\phi_{ij}^{(2)}, \phi_{ij}^{(3)}, \phi_{ij}^{(4)}$: ずれの方向を表わすテンソルの成分で0または±1の値をとる。

ひずみテンソルの表現行列 $[S_{ij}]$ が対角線行列になるような座標系においては行列 $[\phi_{ij}^{(1)}]$ は次の式で与えられる。

$$[\phi_{ij}^{(1)}] = \phi^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$[\phi_{ij}^{(2)}] = \phi^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$[\phi_{ij}^{(3)}] = \phi^{(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$[\phi_{ij}^{(4)}] = \phi^{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここにおいて

$\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)}, \phi^{(4)}$: ±1 の値をとる数でその符号は各々の基本ひずみの方向によって定まる。

次に応力について考えてみよう。三次元物体における応力は二階テンソルによって表わされ、それはその応力を生ぜしめるひずみテンソルあるいはその方向成分にある四階テンソルを乗じたもので与えられる。

圧粉体においては全体としてのひずみに対する応力は粉末粒子の構成物質の弾性変形、塑性変形および粒子相互の接触面のすべりによって生ずるものとすれば、各々の原因による応力が互いに独立であり、また圧粉体の力学的性質が等力的である場合には、応力を与える四階テンソルの直交座標系の変換に対する不変性から、各々の原因に対応する四階テンソルは次の式で与えられる。ただし圧粉体は通常その内部に気孔をもち、その部分は応力に寄与しないから、この四階テンソルの成

分の大きさは圧粉体の見かけ上の応力をその充てん率で除した値を応力として与えるように定めた。

$$C_{\alpha\beta ij} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \mu (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j} \delta_{\beta i}) \quad \cdots \cdots (6)$$

$$A_{\alpha\beta ij} = \tau \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \nu (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j} \delta_{\beta i}) \quad \cdots \cdots (7)$$

$$M_{\alpha\beta ij} = \bar{P} \{ \xi \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \eta (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j} \delta_{\beta i}) \} \quad \cdots \cdots (8)$$

ここにおいて

$C_{\alpha\beta ij}$: 粒子の弾性変形による充てん部分における応力を与えるテンソルの成分
 $\alpha, \beta, i, j = x, y, \text{ or } z$

$A_{\alpha\beta ij}$: 粒子の塑性変形による充てん部分における応力を与えるテンソルの成分

$M_{\alpha\beta ij}$: 粒子相互の接触面のすべりまさつによる充てん部分の応力を与えるテンソルの成分

λ, μ, τ, ν : 粒子の構成物質の性質によって定まる数値で λ, μ は連続物体におけるラーメ (Lamé) の定数に相当する。

ξ, η : 粒子相互の接触面の性質によって定まる数値

$\bar{P}$: 粒子相互の接触面における平均有効圧力

$\delta_{\alpha\beta}, \delta_{ij}, \delta_{\alpha i}, \delta_{\alpha j}, \delta_{\beta i}, \delta_{\beta j}$: クローネツカーの記号

(6)式で与えられるテンソルを用いれば圧粉体における弾性変形による応力は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} T_{e\alpha\beta} &= (1-\rho) \sum_{ij} C_{\alpha\beta ij} S_{ij} \\ &= (1-\rho) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (C_{\alpha\beta ij} S^{(i)} \phi_{ij}^{(i)}) \quad \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

ここにおいて

$T_{e\alpha\beta}$: 圧粉体の弾性変形による応力テンソルの成分

ρ : 圧粉体の気孔率

(7)および(8)式で与えられるテンソルを用いれば圧粉体における粒子相互の接触面のすべりおよび粒子自身の塑性変形による全体としての変形(これを見かけ上の塑性変形とよぶことにする)によって生ずる応力はひずみテンソルの方向成分から次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} T_{p\alpha\beta} &= (1-\rho) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \{ f M_{\alpha\beta ij} \phi_{ij}^{(i)} \\ &\quad + (1-f) A_{\alpha\beta ij} \phi_{ij}^{(i)} \} \quad \cdots \cdots (10) \end{aligned}$$

ここにおいて

$T_{p\alpha\beta}$: 圧粉体の見かけ上の塑性変形による応力テンソルの成分

f : 見かけ上の塑性変形による応力に対する粒子相互の接触面のすべりまさつ力の寄与率

2.2 見かけ上の塑性変形の応力

(10)式に(2)~(5), (7), および(8)式を代入し記号を整理すれば次の各式が得られる。

$$\begin{aligned} T_{pxx} &= (1-\rho) [\phi^{(1)} \{ f P m_v + (1-f) a_v \} \\ &\quad + (\phi^{(2)} + \phi^{(4)}) \{ f \bar{P} m_s + (1-f) a_s \}] \quad \cdots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{pyy} &= (1-\rho) [\phi^{(1)} \{ f P m_v + (1-f) a_v \} \\ &\quad + (-\phi^{(2)} + \phi^{(3)}) \{ f \bar{P} m_s + (1-f) a_s \}] \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{pzz} &= (1-\rho) [\phi^{(1)} \{ f \bar{P} m_v + (1-f) a_v \} \\ &\quad + (-\phi^{(3)} - \phi^{(4)}) \{ f \bar{P} m_s + (1-f) a_s \}] \quad (13) \end{aligned}$$

ここにおいて m_v, m_s, a_v , および a_s は次の式によって定義される。

$$m_v = 3\xi + 2\eta \quad \cdots \cdots (14)$$

$$m_s = 2\eta \quad \cdots \cdots (15)$$

$$a_v = 3\tau + 2\nu \quad \cdots \cdots (16)$$

$$a_s = 2\nu \quad \cdots \cdots (17)$$

(a_s は連続物体の降伏せん断応力に対応する)

(11)~(13)式によってひずみテンソルが対角線的に表わされるような座標系における圧粉体の見かけ上の塑性変形による応力テンソルの成分が与えられる。そうしてこれ以外の成分は0である。

2.3 有効弾性ひずみ

一般に理想的な弾性および塑性をもった物体が徐々に変形し、そのひずみの大きさがだいに増加する場合、はじめは弾性ひずみがおこりそれによる応力の大きさが塑性ひずみによる応力の大きさに等しくなった点から塑性ひずみが進行し、その際の応力は一定に保たれる。この塑性ひずみの過程においてはその応力に対応する弾性ひずみが常に共存し、変形のための外力を減少させればその物体は弾性変形によってひずみを減少させもどり変形をする。この現象を通常スプリングバックという。このように塑性ひずみ過程およびもどり変形過程において存在する弾性ひずみを有効弾性ひずみとよぶことにする。

この有効弾性ひずみのテンソル成分を(1)式と

同様に次のように表わすことにする。

$$\xi_{ij} = \sum_{l=1}^4 \xi^{(l)} \phi_{ij}^{(l)} \quad (18)$$

ここにおいて

ξ_{ij} : 有効弾性ひずみのテンソル成分

$\xi^{(l)}$: 有効弾性ひずみを構成する l 番目の基本ひずみの大きさ。

(18)式を(9)式の S_{ij} のところに代入し(6)式を用いて整理すれば有効弾性ひずみによる応力テンソルの成分を与える次の式が得られる。

$$T_{exx} = (1-\rho)(\phi^{(1)}3k\xi^{(1)} + \phi^{(2)}G\xi^{(2)} + \phi^{(4)}G\xi^{(4)}) \quad (19)$$

$$T_{eyy} = (1-\rho)(\phi^{(1)}3k\xi^{(1)} - \phi^{(2)}G\xi^{(2)} + \phi^{(3)}G\xi^{(3)}) \quad (20)$$

$$T_{ezz} = (1-\rho)(\phi^{(1)}3k\xi^{(1)} - \phi^{(3)}G\xi^{(3)} - \phi^{(4)}G\xi^{(4)}) \quad (21)$$

ここにおいて $3k$ および G は次の式で定義される。

$$3k = 3\lambda + 2\mu \quad (22)$$

$$G = 2\mu \quad (23)$$

(k は連続物体の体積弾性率に、また G は剛性率に相当する。)

しかるに見かけ上の塑性変形においては圧粉体内の応力の大きさはその際の実効弾性ひずみによる応力の大きさに等しくなければならない。したがって(11), (12), および(13)の各式によって与えられる応力テンソルの成分の値はそれぞれ(19), (20), および(21)の各式によって与えられる値に任意の $\phi^{(l)}$ の値について等しくなければならない。そこで見かけ上の塑性変形の過程における $\xi^{(l)}$ の値を $\xi_1^{(l)}$ とすれば次の式がなりたつはずである。

$$\xi_1^{(1)} = \frac{1}{3k} \{fPm_v + (1-f)a_v\} \quad (24)$$

$$\xi_1^{(2)}, \xi_1^{(3)}, \text{ or } \xi_1^{(4)} = \frac{1}{G} \{fPm_s + (1-f)a_s\} \quad (25)$$

(24)および(25)式を(18)式に代入し(2)~(5)式を用いて整理すれば見かけ上の塑性変形の過程における有効弾性ひずみテンソルの成分を表わす次の式が得られる。

$$\xi_{1xx} = \frac{\phi^{(1)}}{3k} \{fPm_v + (1-f)a_v\}$$

$$+ \frac{(\phi^{(2)} + \phi^{(4)})}{G} \{fPm_s + (1-f)a_s\} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \xi_{1yy} = & \frac{\phi^{(1)}}{3k} \{fPm_v + (1-f)a_v\} \\ & + \frac{(-\phi^{(2)} + \phi^{(3)})}{G} \{fPm_s \\ & + (1-f)a_s\} \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{1zz} = & \frac{\phi^{(1)}}{3k} \{fPm_v + (1-f)a_v\} \\ & + \frac{(-\phi^{(3)} - \phi^{(4)})}{G} \{fPm_s \\ & + (1-f)a_s\} \quad (28) \end{aligned}$$

(26)~(28)式はスプリングバックの大きさの計算に用いることができる²⁾。

2-4 粒子相互の接触面における圧力

これまでに得られた式には、粉末粒子相互の接触面におけるすべりまさつに関してその面を界して二つの粒子間にはたらく有効平均圧力 P が含まれている。ここでは見かけ上の塑性変形過程における $\bar{P}$ の値を求めることを考えてみる。

P の値がこのような接触面における圧力の平均値に等しいと仮定すれば、それは圧粉体内部の任意の応力面を界してその両側の部分が互いに受ける圧力、すなわち、この面における応力のその面に垂直な成分に負号をつけたものの正の値についての平均値(もし負の値があればそれは0として計算する。このように計算をするのは負の圧力はすべりまさつに寄与しないからである)を圧粉体の充てん率で除したもので与えられる。すなわち、

$$\bar{P} = \frac{\int P(\bar{n}) d\omega}{(1-\rho) \int d\omega} \quad (29)$$

ここにおいて

$\bar{n}$: 任意の応力面の法線ベクトル

$P(\bar{n})$: 法線ベクトル $\bar{n}$ をもった応力面を界してはたらく圧力

$d\omega$: 応力面の法線ベクトルが含まれる微小立体角

応力面を界してはたらく圧力は、ひずみテンソルが対角線行列で表わされるような座標系においては圧粉体の応力定数テンソルが等方的であるとすればそのひずみによって生ずる応力のテンソルも対角線行列で表わされるから、次の式で与えら

れる。

$$P(\vec{n}) = -(n_x^2 T_{p_{xx}} + n_y^2 T_{p_{yy}} + n_z^2 T_{p_{zz}}) \quad (30)$$

ここにおいて

n_x, n_y, n_z : 応力面の法線ベクトルの成分

(30) 式を (29) 式に代入すれば次の式が得られる。

$$P = -\frac{T_{p_{xx}} + T_{p_{yy}} + T_{p_{zz}}}{3(1-\rho)} \quad (31)$$

(11)~(13) 式を (31) 式に代入すれば次の式が得られる。

$$\bar{P} = -\phi^{(1)} \{f\bar{P}m_v + (1-f)a_v\} \quad (32)$$

(32) 式を P について整理すれば次の式が得られる。

$$\bar{P} = \frac{(1-f)a_v}{1+\phi^{(1)}fm_v} \quad (33)$$

この (33) 式が見かけ上の塑性変形をする等方的な圧粉体の充てん部分における平均内部圧力としての $\bar{P}$ を与える式である。

次に $\bar{P}$ の値が接触面における正の圧力の最小値 (もし負の圧力があればこの最小値は 0 であるとする) に等しいと仮定すれば、それは $P(\vec{n})$ の正の最小値を圧粉体の充てん率で除したもので与えられ、また $\bar{P}(\vec{n})$ の最小値は次の条件

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (34)$$

のもとで (30) 式の右辺の最小値を求めることによって与えられるから次の結果が得られる。

$$P = -\frac{T_{p_{aa}}(\max)}{(1-\rho)} \quad (35)$$

ここにおいて

$T_{p_{aa}}(\max)$: $T_{p_{xx}}, T_{p_{yy}}, T_{p_{zz}}$ の中の最大値が負ならばその値をとり、正ならば 0 とする。

(35) 式で表わされた P についても (11)~(13) 式を用いて (32), (33) 式と同様の計算を行なうことができるがここでは省略する。

3. 応力定数の相互関係

変形する等方性の圧粉体の充てん部分を局部的に見た場合、新たに弾性変形がおこらないとすればそこには体積変化はなく、また粒子相互の接触面のすべりおよび粒子自身の塑性変形に対しては

それぞれ 2 つの異なった応力定数の存在は考えられないから、さきに (14)~(17) 式によって粒子間のすべりおよび粒子の塑性変形に関して導入された 4 つの応力定数の中で独立なものは 2 つしかないはずである。したがって 4 つの応力定数の中の 2 つたとえば m_v, a_v は他の 2 つ m_s, a_s と圧粉体における空孔の形状に関する因子との関数として表わされるはずである。ここではこの関数関係を圧粉体を模形的に単純な中空球体でおきかえることによって求めてみる。

3.1 圧縮される中空球体

Fig. 1 のような中空球体がある。その充てん部分の体積を一定に保ちながら中心対称的に圧縮される場合を考えてみよう。中空球体の中心対称的な微小な圧縮変形による各点の変位ベクトルは次の式で与えられる。

$$\vec{D} = -\frac{D\vec{r}}{r} \quad (36)$$

ここにおいて

$\vec{D} (D_x, D_y, D_z)$: 変位ベクトル

$r(x, y, z)$: 中空球体の中心を原点とする空間座標ベクトル

D : 変位ベクトルの大きさ、ここでは r のみの関数

r : 中空球体の中心からの距離

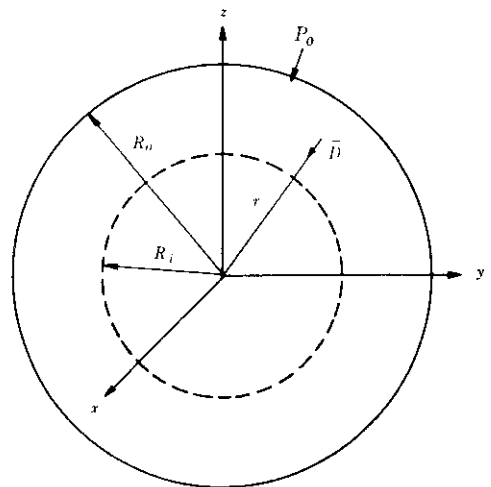


Fig. 1 Compressed hollow sphere

充てん部分の体積が一定に保たれるためには変位ベクトルは次の条件式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (37)$$

(37)式を(36)式を用いて整理すれば次の式が得られる。

$$\frac{dD}{dr} = -\frac{2D}{r} \quad (38)$$

一般的に変位ベクトルが与えられた場合ひずみテンソルの各成分は次の式で与えられる。

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{dD_\alpha}{d\beta} + \frac{\partial D_\beta}{\partial \alpha} \right) \quad (39)$$

ただし $\alpha, \beta = x, y, \text{ or } z$

(39)式を(36)および(38)式を用いて整理すれば次の式が得られる。

$$S_{\alpha\beta} = D \left(\frac{3\alpha\beta}{r^3} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r} \right) \quad (40)$$

この場合全体系の変化は中心対称的であるから、中空球の中心を原点とする直交座標の z 軸上のみを考えても一般性は失なわれない。そこで(40)式で与えられる z 軸上でのひずみテンソルの成分を求め、そのテンソルの表現行列の基本ひずみへの分解を行えば次の式が得られる。

$$\begin{aligned} [S_{ij}] &= \frac{D}{r} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{D}{r} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \quad (41) \end{aligned}$$

したがって、ここでは(41)式と(1)～(5)式との比較から $S^{(1)}$ および $\phi^{(1)}$ について

$$S^{(3)} = S^{(4)} = \frac{D}{r} \quad (42)$$

$$\phi^{(3)} = \phi^{(4)} = -1 \quad (43)$$

であり他の因子は0であることがわかる。

3.2 応力の平衡条件

中空球体の微小な圧縮変形が充てん部分の塑性変形のみでおこるものとすれば、そこでは(11)～(13)式において $\rho=0$ 、および $f=0$ において得られる式がなりたつばである。ただし体積変化がないという条件を満たすためには、均等な体積変化に対する応力定数が無限大であり、体積変化の

ひずみが無限小であっても有限の大きさの応力が存在しなければならない。したがって $\phi^{(1)} \rightarrow 0$ であっても(11)～(13)式の右辺の第1項に相当する部分は0とはならず有限の値をもった空間座標の適当な関数でおきかえられなければならない。この関数は応力に関する境界条件で定まり、ここでは変形の中心対称性から r の関数であると考えられる。(11)～(13)式に(43)式の値を代入し、この考え方によって整理すれば中空球体の z 軸上の応力について次の式が得られる。

$$T_{prr} = T_{pyy} = -p(r) - a_s \quad (44)$$

$$T_{pzz} = -p(r) + 2a_s \quad (45)$$

ここにおいて

$p(r)$: 境界条件によって定まる r の関数

(44)および(45)式は充てん部分の体積を一定に保ちながら中心対称的に塑性変形によって圧縮される中空球体において、中心を含む平面内の応力面ではそれに垂直な圧力 $p(r) + a_s$ のみがはたらき、半径に垂直な応力面においては半径方向の圧力 $p(r) - 2a_s$ のみがはたらくことを示している。

次に Fig. 2 のように中心を頂点とする小さい頂角をもった円錐面と半径 r および $r+dr$ の2つの球面で区切られたこの中空球体の小部分を考

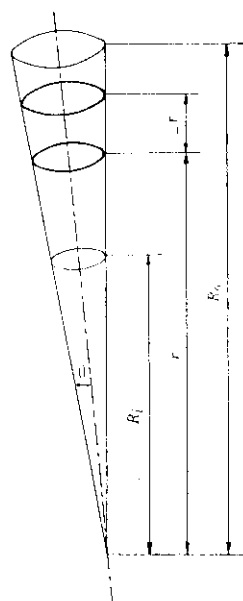


Fig. 2 A part of the hollow sphere cut off by a cone

えてみる。この小部分において中空球体の外側に向いた面および中心に向いた面にはたらく力の大きさは、(45)式からそれぞれ次の式で与えられることがわかる。

$$F_1 = \{p(r+\Delta r) - 2a_s\} \pi \theta^2 (r+\Delta r)^2 \dots\dots\dots (46)$$

$$F_2 = \{p(r) - 2a_s\} \pi \theta^2 r^2 \dots\dots\dots (47)$$

ここにおいて

F_1 : 中空球体の小部分の外側の面にはたらく力

F_2 : 中空球体の小部分の内側の面にはたらく力

2θ : 円錐面の頂角

この小部分の円錐で区切られた側面にはたらく力の円錐の中心線に平行な成分の大きさは Δr についての 2 次以上の高次の微小量を無視すれば、(44)式から次の式で与えられることがわかる。

$$F_3 = \{p(r) + a_s\} 2\pi \theta^2 r \Delta r \dots\dots\dots (48)$$

ここにおいて

F_3 : 中空球体の小部分の側面にはたらく力の円錐の中心線に平行な成分の大きさ

(46)および(47)式より F_1 と F_2 の差をとり Δr について 2 次以上の高次の微小量を無視すれば次の式が得られる。

$$F_1 - F_2 = \Delta p \pi \theta^2 r^2 + \{p(r) - 2a_s\} 2\pi \theta^2 r \Delta r \dots\dots\dots (49)$$

ここにおいて

$$\Delta p = p(r+\Delta r) - p(r) \dots\dots\dots (50)$$

しかるに力の平衡を考えれば $F_1 - F_2$ は F_3 に等しくなければならないから、(48)式と(49)式の右边を等しいとおけば次の式が得られる。

$$\Delta p = \frac{6a_s \Delta r}{r} \dots\dots\dots (51)$$

(51)式を r について中空球の内面から外面まで積分すれば次の式が得られる。

$$p(R_o) = p(R_i) + 6a_s \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) \dots\dots\dots (52)$$

ここにおいて

R_o : 中空球体の外側半径

R_i : 中空球体の内側半径

しかるに(45)式より中空球体の内面にはたらく圧力は $-T_{pzz}$ の $r=R_i$ における値 $-p(R_i) + 2a_s$ で与えられる。ここではこの圧力を無視することにして 0 とおけば次の式が得られる。

$$p(R_i) = 2a_s \dots\dots\dots (53)$$

(45), (52), および(53)式よりこの場合の中空球体の外面にはたらく圧力を与える次の式が得られる。

$$P_o = -T_{pzz}(R_o) = 6a_s \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) \dots\dots\dots (54)$$

ここにおいて

P_o : 中空球体の外面にはたらく圧力

この章のはじめにのべたようにこの中空球体を圧粉体を局部的に見た一様形と考えれば、この P_o は圧粉体における充てん部分の塑性変形による見かけ上の均等な圧縮による応力の大きさ a_p に相当するものと考えられる。一方においてこの中空球体の気孔率は次の式で与えられる。

$$\rho_h = \left(\frac{R_o}{R_i}\right)^{-3} \dots\dots\dots (55)$$

ここにおいて

ρ_h : 中空球体の気孔率

そこで圧粉体のすべての気孔を球状のもので置きかえ、それを取り囲む同一の気孔率をもった中空球体で圧粉体を隙間なく埋めつくすとすれば中空球体の一部は互いに重なり合うために、 ρ_h は圧粉体の気孔率 ρ よりも小さくする必要があり。この ρ_h を ρ に 1 より小さい係数を乗じたものに等しいと仮定し、これを用いて(54)式の右边を書きかえれば、圧粉体における a_p と a_s の関係を近似的に表わすものとして次の式が得られる。

$$a_p \doteq -2a_s \ln(cp) \dots\dots\dots (56)$$

ここにおいて

c : ρ を ρ_h に対応させる 1 より小さい係数
(仮に圧粉体のすべての気孔が同じ大きさで立方格子状に並んでいたとすれば c の値は 0.362 となる。実際の圧粉体においては気孔の大きさは不均一でありその分布も不規則であるからその場合の c の値はこれよりも小さいものと考えられる。)

粒子相互の接触面のすべりまさつについても、中空球体の充てん部分に細かい接触面が均等に分布し、そのすべりによって圧縮変形がおこるものと考えれば塑性変形の場合と相似的な理論がなりたつので、 m_o と m_s の関係についても次の近似式が得られる。

$$m_o \doteq -2m_s \ln(cp) \dots\dots\dots (57)$$

(56)式および(57)式が中空球体模形を用いて得

られる圧粉体における二つの応力定数と圧粉体の構造因子としての気孔率についての相互関係を近似的に表わす式である。

4. 圧縮曲線

これまでの述べた理論の一つの応用例として、金型内で圧縮される圧粉体における気孔率(密度)と加圧力との関係を表わす、いわゆる圧縮曲線を求めてみることにする。

4.1 圧縮される円柱形圧粉体

Fig. 3 のように円筒形の金型中でその直径を一定に保ちながら中心軸に平行に一樣に圧縮される円柱形の圧粉体を考えてみる。この圧縮による圧粉体内の任意の点におけるひずみテンソルおよびその基本ひずみへの分解は次の行列形式で与えられる。

$$[S_{ij}] = \frac{\Delta l}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\Delta l}{3l} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad (58)$$

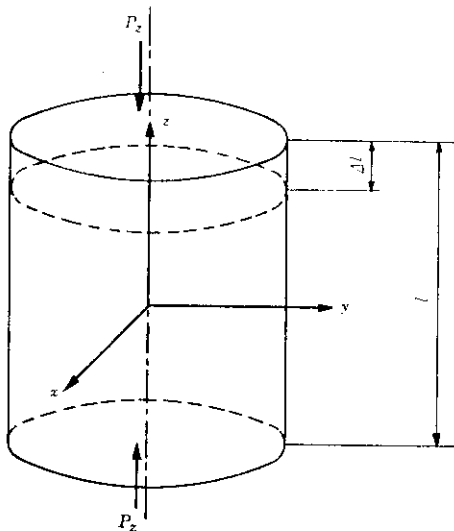


Fig. 3 Compressed cylindrical green compact

ここにおいて

l : 円柱形圧粉体のはじめの高さ

Δl : 円柱形圧粉体の圧縮による高さの減少量

(58) 式を (1)~(5) 式と比較することにより $S^{(k)}$ および $\phi^{(k)}$ として次の値が得られる。

$$S^{(1)} = S^{(3)} = S^{(4)} = \frac{\Delta l}{3l} \quad (59)$$

$$\phi^{(1)} = -1, \phi^{(3)} = \phi^{(4)} = 1 \quad (60)$$

その他の因子は 0 である。

4.2 加圧力と気孔率の関係

円柱形圧粉体の圧縮変形が見かけ上の塑性変形によるものとすれば、その際の中心軸に平行な加圧力は $-T_{pzz}$ で与えられるから (60) 式を (13) 式に代入することにより次の式が得られる。

$$P_z = -T_{pzz} = (1-\rho)\{fP(m_v + 2m_s) + (1-f)(a_v + 2a_s)\} \quad (61)$$

ここにおいて

P_z : 中心軸に平行な加圧力

ここで P として平均内部圧力を用いることにし (33) 式の $\phi^{(1)}$ を -1 としたものを (61) 式に代入すれば次の式が得られる。

$$P_z = (1-\rho)(1-f) \left\{ \frac{fa_v}{1-fm_v} (m_v + 2m_s) + (a_v + 2a_s) \right\} \quad (62)$$

圧粉体の見かけ上の塑性変形の応力に対する粒子間接触面のすべりまさつの寄与率を表わす係数 f については、もし圧粉体において粒子間に空隙が全くない ($\rho \rightarrow 0$) とすれば粒子間接触面のすべりはおこりえないから $f=0$ であり、粒子間に空隙がある場合にはその大きさとともに f は増加するものと考えられるから、ここでは ρ の小さい範囲において f は ρ に比例するものと仮定する。

$$f = \beta\rho \quad (63)$$

ここにおいて

β : 比例定数 (この β は粉末粒子の形状による粒子間のからみ合いの程度が少ないほど大きいものと考えられる)

(56), (57), および (63) 式を (62) 式に代入すれば次の式が得られる。

$$P_z = \frac{2a_s(1-\rho)(1-\beta\rho)\{1-\ln(c\rho)\}}{1+2\beta\rho m_s \ln(c\rho)} \quad (64)$$

この(64)式によって圧縮曲線が与えられる。

4.3 実験結果との比較

各種の鉄粉に潤滑剤としてステアリン酸亜鉛1%を添加したもの約9gを加圧面積 1cm^2 の円筒形金型中に入れ、インストロン型試験機を用い圧下速度 5mm/min で圧縮した場合のストロークと加圧力の測定値から求められた金型内において加圧中の圧粉体における気孔率と加圧力の関係をFig. 4 に実線で示す。

Fig. 4 に破線で示されているのは、係数 c としてスプリングバックの実験結果から推定された値である0.25を用い、それぞれの鉄粉についてパラメーター a_s , β , および m_s の値を適当に選び、(64)式を用いて計算された圧縮曲線である。そこで用いられた各種の鉄粉についてのパラメーターの値をTable 1 に示す。この値から粒子の塑性変形に対する抵抗力は電解鉄粉, ミルスケール還元鉄粉, 鉱石還元鉄粉の順に増加し、圧粉体の変形における粒子間接触面のすべりの寄与率は電解鉄粉の場合が最も大きく、また粒子間接触面のまさつ係数は鉱石還元鉄粉の場合が最も大きいことがわかる。このような結果は各種の鉄粉についての経験的な知識とよく一致する。

5. 結 言

圧粉体における均一に分布した見かけ上のひずみをとまらう変形が粒子間接触面のすべりと粒子自身の塑性変形によって起こるものと仮定し、

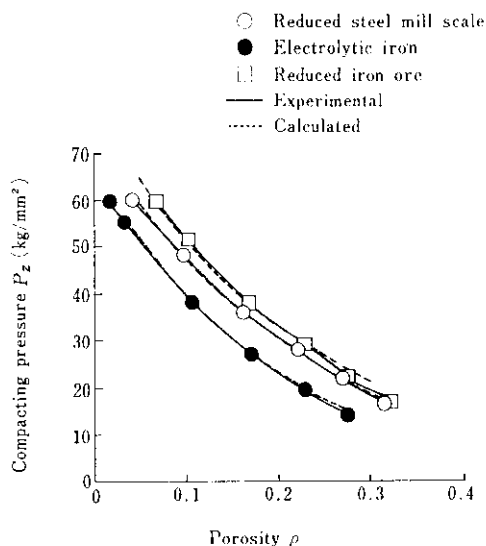


Fig. 4 Compression curve

一般的ひずみと応力の理論を適用することにより粒子間接触面のすべりまさつ係数, 粒子自身の降伏せん断応力, 圧粉体の気孔率, および粒子間からのみ合いの不足を表わす係数を用いてその変形による応力を表わす式を導いた。またスプリングバック現象を有効弾性ひずみの考慮のもとにこの理論によって説明した。

実際の圧粉体においてはひずみの空間的な分布は均一ではないが、本論文においてのべた考え方はそのような圧粉体においても個々の部分については原則的になりたつものと思う。またひずみの大きさの分布が不均一であってもひずみの方向がほぼ均一であれば、その場合の圧粉体における見

Table 1 Values of parameters used on the theoretical calculation

Kind of iron powders	Shearing yield stress of particle a_s (kg/mm ²)	Insufficiency of connection inter particles β	Coefficient of friction at the contact surface between particles m_s
Reduced steel mill scale	6.01	1.60	0.08
Electrolytic iron	5.34	2.00	0.06
Reduced iron ore	6.37	1.60	0.09

$c=0.25$: The coefficient that relate the porosity of compact to the porosity at the hollow sphere model

かけ上のひずみと応力の平均的な関係は本論文で示された方法によって求めることが可能であろう。実際にこの理論によって得られた圧縮曲線を表わす式による計算値が実験結果と定性的に一致することはこの点の一つの例証であると思う。圧

粉体が異方性をもつ場合に対しては(6)~(8)式の応力定数テンソルを異方性のものでおきかえて、本論文と同様の手法で行なうことが可能であると思う。

参 考 文 献

- 1) 岸高, 森岡: 昭和46年春季大会講演概要集, [粉体粉末冶金協会], 66
- 2) 岸高, 森岡: 粉体および粉末冶金, 発表予定

